

Analisis Kestabilan Solusi Soliton pada Persamaan Schrödinger Nonlinier Diskrit Nonlokal

Received 8th October 2021
Accepted 20th December 2021
Published 15th April 2022

Open Access

Gusrian Putra^a, Hanifah Septaningtyas^a, Elsa Nabila^a, Lisa Arianti Br Tarigan^a

^aProgram Studi Matematika, Jurusan Sains, Institut Teknologi Sumatera

*Corresponding E-mail: gusrian.putra@ma.itera.ac.id

Abstract: In this paper, the Nonlocal Discrete Nonlinear Schrödinger (DNLS) equation that interpolates the Nonlocal Ablowitz-Ladik DNLS and the Nonlocal Cubic DNLS equations and its stability are studied in detail. The solution of the Nonlocal SNLD equation is a soliton wave in the form of a Gaussian ansatz obtained using the method of Variational Approximation (VA). The stability of the solution is also analyzed using the VA. These semi-analytical results are then compared to numerical results. The soliton and its stability obtained via VA is concluded to be having a fairly good conformity with numerical results.

Keywords: Nonlocal Discrete Nonlinear Schrödinger equation, soliton, Gaussian ansatz, variational approximation, stability

Abstrak: Pada makalah ini, persamaan Schrödinger Nonlinier Diskrit (SNLD) Nonlokal yang menginterpolasi persamaan SNLD Ablowitz-Ladik Nonlokal dan persamaan SNLD Kubik Nonlokal beserta kestabilannya dikaji secara detail. Solusi dari persamaan SNLD Nonlokal merupakan gelombang soliton dalam bentuk ansatz Gaussian yang diperoleh dengan menggunakan metode Aproksimasi Variasional (AV). Kestabilan solusi soliton juga dianalisis dengan menggunakan metode AV. Hasil-hasil yang diperoleh dengan menggunakan metode AV selanjutnya dibandingkan dengan hasil-hasil numerik. Solusi soliton yang diperoleh menggunakan metode AV disimpulkan mempunyai kesesuaian yang cukup bagus dengan hasil-hasil numerik.

Kata Kunci: persamaan Schrödinger Nonlinier Diskrit Nonlokal, soliton, ansatz Gaussian, aproksimasi variasional, kestabilan

Pendahuluan

Salah satu persamaan beda-diferensial yang menjelaskan berbagai fenomena penting di bidang fisika, kimia dan biologi adalah persamaan Schrödinger Nonlinier Diskrit (SNLD). Sebagai contoh, persamaan SNLD menjelaskan perambatan sinar optik pada larik pandu gelombang (*waveguide arrays*) yang tersusun atas senyawa aluminium gallium arsenide (AlGaAs) [1]. Persamaan SNLD juga mendeskripsikan beberapa fenomena dalam fisika atom, molekul dan osilator tak-harmonik [2].

Persamaan SNLD memiliki bentuk umum sebagai berikut [2]

$$i\dot{\Phi}_n = -\varepsilon(\Phi_{n+1} - 2\Phi_n + \Phi_{n-1}) + F(\Phi_{n+1}, \Phi_n, \Phi_{n-1}), \quad (1)$$

dengan $\Phi_n \equiv \Phi_n(t)$ adalah fungsi gelombang bernilai kompleks pada waktu $t \in \mathbb{R}^+$ dan *site* $n \in \mathbb{Z}$, $\dot{\Phi}_n$ merepresentasikan turunan Φ_n terhadap waktu, $\varepsilon > 0$ menyatakan *coupling constant* atau konstanta pengikat antara dua *site* yang berdekatan, dan F merepresentasikan suku nonlinier. Beberapa bentuk suku nonlinier F diantaranya [2]:

Original Article

1. Kenonlinieran bertipe kubik:

$$F = -|\Phi_n|^2 \Phi_n, \quad (2)$$

2. Kenonlinieran bertipe Ablowitz Ladik (AL):

$$F = \frac{1}{2} |\Phi_n|^2 (\Phi_{n+1} + \Phi_{n-1}), \quad (3)$$

3. Kenonlinieran bertipe *saturable*:

$$F = \frac{\Phi_n}{1 + |\Phi_n|^2}, \quad (4)$$

4. Kenonlinieran bertipe kuintik:

$$F = |\Phi_n|^4 \Phi_n \quad (5)$$

Salah satu sifat menarik dari persamaan SNLD (1) adalah eksistensi solusi soliton yang dimilikinya. Soliton merupakan solusi persamaan beda diferensial nonlinier atau persamaan diferensial parsial nonlinier yang mempunyai profil terlokalisasi yang tetap mempertahankan bentuknya [3]. Di awal tahun 1976, Ablowitz dan Ladik berhasil menunjukkan bahwa persamaan SNLD dengan kenonlinieran bertipe AL (3) bersifat *integrable*, yaitu dapat diselesaikan solusi solitonnya secara eksak [4]. Kemudian pada tahun 1994, MacKay dan Aubry membuktikan eksistensi soliton pada persamaan SNLD dengan kenonlinieran bertipe kubik (2) untuk konstanta pengikat ε lemah [5].

Dalam menentukan solusi soliton pada persamaan SNLD (1), metode aproksimasi variasional (selanjutnya disingkat AV) merupakan salah satu metode pendekatan analitik yang paling sering digunakan. Metode ini dikembangkan berdasarkan prinsip Hamiltonian yang menyatakan bahwa persamaan gerak suatu sistem ditentukan oleh titik-titik kritis dari integral Lagrangiannya (yaitu selisih antara energi kinetik dan energi potensial sistem tersebut) [6]. Keberhasilan metode ini sangat bergantung pada pemilihan ansatz, yaitu bentuk analitik percobaan dari solusi yang ingin dicari [7]. Salah satu langkah dalam mengaproksimasi solusi soliton pada persamaan SNLD dengan menggunakan metode AV adalah menentukan Lagrangian dari sistem. Namun dalam beberapa kasus,

Lagrangian dari suatu sistem sangat sulit untuk diformulasikan. Dalam [8], Rusin dkk mengembangkan metode AV sedemikian sehingga tidak diperlukan formulasi Lagrangian.

Pengembangan lebih lanjut dari persamaan SNLD adalah ketika suku nonlinier $|\Phi_n|^2$ diganti dengan $\Phi_n \bar{\Phi}_{-n}$, dimana $\bar{\Phi}_{-n}$ menyatakan kompleks konjugat dari Φ_{-n} . Suku nonlinier yang demikian dinamakan suku nonlinier nonlokal, artinya fungsi gelombang di *site* n selalu membutuhkan informasi dari *site* berlawanan $-n$ [9]. Pada makalah ini, akan dikaji persamaan SNLD Nonlokal yang diberikan oleh

$$i\dot{\Phi}_n = -\varepsilon \Delta_2 \Phi_n + \Phi_n - (1 - \delta) \Phi_n^2 \bar{\Phi}_{-n} - \frac{\delta}{2} \Phi_n \bar{\Phi}_{-n} (\Phi_{n+1} + \Phi_{n-1}), \quad (6)$$

dengan $\Delta_2 \Phi_n = \Phi_{n+1} - 2\Phi_n + \Phi_{n-1}$. Persamaan (6) merupakan persamaan yang menginterpolasi antara persamaan SNLD Kubik Nonlokal ketika konstanta interpolasi $\delta = 0$ dan persamaan SNLD AL Nonlokal ketika $\delta = 1$. Penelitian tentang topik ini merupakan pengembangan dari kajian yang telah dilakukan dalam mengaproksimasi soliton *onsite* pada persamaan (6) dengan menggunakan metode AV dalam [10] dan analisis kestabilan soliton secara numerik pada persamaan SNLD Nonlokal dengan penambahan *parametric driving* dalam [11].

Metode

Dalam makalah ini terlebih dahulu disajikan penurunan metode AV berdasarkan prinsip Hamiltonian dengan merujuk pada temuan Rusin dkk dalam [8]. Formulasi akhir pada metode AV selanjutnya digunakan untuk mengaproksimasi solusi soliton beserta kestabilannya. Selanjutnya, metode numerik untuk menentukan solusi soliton dan kestabilannya juga akan dipaparkan dengan merujuk pada [11,8], dalam kasus ini solusi soliton akan dicari menggunakan metode Newton-Raphson sedangkan kestabilannya dapat ditentukan dengan menyelesaikan masalah nilai eigen.

Formulasi Aproksimasi Variasional

Pada subbab ini akan diuraikan formulasi metode aproksimasi variasional untuk persamaan beda-diferensial yang merujuk dari referensi [8]. Misalkan $\Phi_n(t)$ merupakan fungsi bernilai kompleks dengan $t \geq 0$ dan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ memenuhi persamaan beda-diferensial

$$i\dot{\Phi}_n = \mathcal{F}_V(\Phi_{n+1}, \Phi_n, \Phi_{n-1}) + \mathcal{F}_{NV}(\Phi_{n+1}, \Phi_n, \Phi_{n-1}), \quad (7)$$

dimana $\bar{\Phi}_n$ merupakan kompleks konjugat dari Φ_n . Sisi kanan persamaan (6) dibagi atas dua bagian, yakni bagian variasional \mathcal{F}_V dan bagian nonvariasional \mathcal{F}_{NV} . Jika $\mathcal{F}_{NV} \equiv 0$, maka terdapat Lagrangian dalam bentuk

$$\mathcal{L} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} L(\Phi_n, \dot{\Phi}_n, \bar{\Phi}_n, \dot{\bar{\Phi}}_n), \quad (8)$$

sehingga persamaan (6) dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$i\dot{\Phi}_n - \mathcal{F}_V(\Phi_n, \bar{\Phi}_n) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Phi}_n} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\Phi}}_n} \right). \quad (9)$$

Misalkan ϕ_n adalah suatu ansatz yang memuat sejumlah N parameter (disebut paramater variasional), yaitu A_j , untuk $j = 1, 2, \dots, N$ yang akan ditentukan nilainya. Parameter-parameter ini bergantung terhadap waktu t . Selanjutnya substitusikan ansatz tersebut ke persamaan (8) dan selesaikan penjumlahannya. Hasil penjumlahan tersebut dinamakan Lagrangian efektif dan dinotasikan dengan \mathcal{L}_{eff} . Dengan demikian, persamaan (9) menjadi

$$i\dot{\phi}_n - \mathcal{F}_V(\phi_n, \bar{\phi}_n) = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial \bar{\phi}_n} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial \dot{\bar{\phi}}_n} \right). \quad (10)$$

Berdasarkan prinsip Hamiltonian berlaku

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial A_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial \dot{A}_j} \right) = 0. \quad (11)$$

Karena ϕ_n merupakan fungsi bernilai kompleks, maka

$$\frac{\partial \bar{\phi}_n}{\partial A_j} = \overline{\frac{\partial \phi_n}{\partial A_j}}, \quad (12)$$

dan

$$\overline{\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial \bar{\phi}_n}} - \frac{d}{dt} \left(\overline{\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial \dot{\bar{\phi}}_n}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial \phi_n} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial \dot{\phi}_n} \right). \quad (13)$$

Selanjutnya, pandang kasus $\mathcal{F}_{NV} \neq 0$. Berdasarkan persamaan (10), berlaku $\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial \bar{\phi}_n} = i\dot{\phi}_n - \mathcal{F}_V + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial \dot{\bar{\phi}}_n} \right)$ sehingga diperoleh

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial A_j} = 2\text{Re} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(i\dot{\phi}_n - \mathcal{F}_V + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\phi}}_n} \right) \right) \frac{\partial \bar{\phi}_n}{\partial A_j} \right). \quad (14)$$

Karena ansatz ϕ_n diasumsikan memenuhi persamaan (7), maka berlaku $i\dot{\phi}_n - \mathcal{F}_V = \mathcal{F}_{NV}$, sehingga persamaan (14) menjadi

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial A_j} = 2\text{Re} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\mathcal{F}_{NV} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\phi}}_n} \right) \right) \frac{\partial \bar{\phi}_n}{\partial A_j} \right). \quad (15)$$

Dengan demikian dari persamaan (14) dan (15) diperoleh persamaan

$$\text{Re} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} i\dot{\phi}_n \frac{\partial \bar{\phi}_n}{\partial A_j} \right) = \text{Re} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}_V + \mathcal{F}_{NV}) \frac{\partial \bar{\phi}_n}{\partial A_j} \right). \quad (16)$$

Konstruksi Penyelesaian Numerik dan Kestabilan

Pada subbab ini akan dijelaskan mengenai perhitungan solusi soliton onsite stasioner dari persamaan (6) secara numerik dengan menggunakan metode Newton-Raphson dan kemudian menganalisis kestabilannya. Perhitungan numerik dilakukan pada domain $n \in [-N, N]$ dengan $N \in \mathbb{Z}$ yang cukup besar dan menggunakan syarat batas $\Phi_{\pm(N+1)} = \Phi_{\pm N}$. Pandang kembali persamaan SNLD Nonlokal (6). Misalkan ψ_n merupakan solusi stasioner, maka persamaan stasioner dari (6) diberikan oleh

Original Article

$$0 = -\varepsilon\Delta_2\psi_n + \psi_n - \frac{\delta}{2}\psi_n\psi_{-n}(\psi_{n+1} + \psi_{n-1}) - (1 - \delta)\psi_n^2\psi_{-n}, \tag{17}$$

dimana $\Delta_2\psi_n = \psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}$. Untuk suatu domain $n \in [-N, N]$ dan syarat batas $\psi_{\pm(N+1)} = \psi_{\pm N}$, maka persamaan (15) dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

dimana $\mathbf{x} = [\psi_{-N}, \dots, \psi_N]^T$ dan

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_{-N}(\mathbf{x}), \dots, f_0(\mathbf{x}), \dots, f_N(\mathbf{x})]^T$$

dengan

$$f_{-N}(\mathbf{x}) = -\varepsilon(\psi_{-N+1} - \psi_{-N}) + \psi_{-N} - \frac{\delta}{2}\psi_{-N}\psi_N(\psi_{-N+1} + \psi_{-N}) - (1 - \delta)\psi_{-N}^2\psi_N,$$

$$f_m(\mathbf{x}) = -\varepsilon\Delta_2\psi_m + \psi_m - \frac{\delta}{2}\psi_m\psi_{-m}(\psi_{m+1} + \psi_{m-1}) - (1 - \delta)\psi_m^2\psi_{-m}, \quad m \in [-N + 1, N - 1],$$

$$f_N(\mathbf{x}) = -\varepsilon(\psi_{N-1} - \psi_N) + \psi_N - \frac{\delta}{2}\psi_N\psi_{-N}(\psi_N + \psi_{N-1}) - (1 - \delta)\psi_N^2\psi_{-N}.$$

Adapun rumus iterasi dari metode Newton-Raphson untuk menentukan solusi soliton onsite stasioner dari persamaan (15) diberikan oleh

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{J}^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}), \tag{18}$$

dimana \mathbf{J} adalah matriks Jacobian yang diberikan oleh

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{-N}}{\partial \psi_{-N}} & \dots & \frac{\partial f_{-N}}{\partial \psi_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial \psi_{-N}} & \dots & \frac{\partial f_N}{\partial \psi_N} \end{bmatrix},$$

yang dievaluasi ketika $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(k)}$. Iterasi dihentikan untuk suatu toleransi galat ϵ ketika $\mathbf{x}^{(k+1)}$ memenuhi $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k+1)})\| < \epsilon$. Adapun langkah selanjutnya adalah memeriksa kestabilan solusi soliton onsite stasioner yang diperoleh dari rumus iterasi (18). Dalam hal ini, lakukan pelinieran terhadap persamaan (6) dalam bentuk:

$$\Phi_n(t) = \psi_n + \omega\zeta(t), \quad \omega \ll 1.$$

Selanjutnya analisis kestabilan (linier) pada sistem (6) di sekitar $\Phi_n(t) = \psi_n$ dapat dilakukan setelah menyelesaikan masalah nilai eigen yang muncul dengan menuliskan $\zeta(t) = (\eta_n + i\xi_n)e^{\lambda t}$. Berdasarkan nilai eigen yang diperoleh, solusi soliton onsite dikatakan stabil apabila bagian riil dari semua nilai eigennya tidak bernilai positif.

Hasil dan Diskusi

Langkah pertama yang dilakukan untuk memperoleh solusi soliton onsite pada persamaan (6) dengan menggunakan metode AV adalah menentukan ansatz yang sesuai. Karena hampiran solusi soliton yang diinginkan adalah bertipe onsite, maka dapat dipilih fungsi ansatz Gaussian berikut [8]:

$$\Phi_n(t) = Ae^{-a(n-n_0)^2} e^{i(\alpha+\beta(n-n_0)+\chi(n-n_0)^2)}, \tag{19}$$

dimana parameter-parameter variasional $A, a, \alpha, \beta, \chi$, dan n_0 bernilai riil dan bergantung terhadap waktu t . Perhatikan bahwa ansatz (19) merupakan soliton onsite yang berpusat di $n_0 = 0$ karena Φ_n bernilai maksimum di $n = 0$ dan memenuhi $\Phi_n = \Phi_{-n}$.

Langkah selanjutnya adalah substisusikan ansatz (19) dan persamaan (6) ke sistem persamaan (16). Kemudian dengan misalkan $\mathbf{x} = [A, a, \alpha, \beta, \chi, n_0]^T$, maka sistem persamaan dapat ditulis kembali dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{20}$$

dimana

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -Am_0 & -Am_1 & -\frac{A}{2}m_2 & 0 \\ 0 & 0 & A^2m_2 & A^2m_3 & \frac{A^2}{2}m_4 & 0 \\ Am_0 & -A^2m_2 & 0 & 0 & 0 & 2A^2am_1 \\ Am_1 & -A^2m_3 & 0 & 0 & 0 & 2A^2am_2 \\ -\frac{A}{2}m_2 & -\frac{A^2}{2}m_4 & 0 & 0 & 0 & A^2am_3 \\ 0 & 0 & -2A^2am_1 & -2A^2am_2 & -A^2am_3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ f_3(\mathbf{x}) \\ f_4(\mathbf{x}) \\ f_5(\mathbf{x}) \\ f_6(\mathbf{x}) \end{bmatrix},$$

dan

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \operatorname{Re} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{u_4}{A} \right), \quad f_2 = \operatorname{Re} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} -(n - n_0)^2 u_4 \right), \\
 f_3 &= \operatorname{Re} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} -i u_4 \right), \quad f_4 = \operatorname{Re} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} -i(n - n_0) u_4 \right), \\
 f_5 &= \operatorname{Re} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} -\frac{i}{2} (n - n_0)^2 u_4 \right), \\
 f_6 &= \operatorname{Re} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(2a(n - n_0) - i \left(\alpha + \beta(n - n_0) + \frac{\chi}{2} (n - n_0)^2 \right) \right) u_4 \right),
 \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
 m_i &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n - n_0)^i e^{-2(n-n_0)^2}, \\
 u_1^{\pm} &= A^2 e^{-a(2(n-n_0)^2 + 2n - 2n_0 \pm 1) + i(\beta + \chi(n - n_0 \pm \frac{1}{2}))}, \\
 u_2 &= A^2 e^{-2a(n-n_0)^2}, \quad u_3 = A^2 e^{-a(2(n-n_0)^2 + 4nn_0) + i(2n(\beta - \chi n_0))}, \\
 u_4 &= (u_1^+ + u_1^-) \left(-\varepsilon + \frac{\delta}{2} u_3 \right) + u_2 (2\varepsilon - 1 + (1 - \delta) u_3).
 \end{aligned}$$

Pada langkah selanjutnya, untuk memperoleh solusi soliton stasioner \mathbf{x}^* bertipe *onsite* dan bernilai riil, substitusikan $\alpha = \beta = \chi = 0$ dan $n_0 = 0$ ke sistem (20). Akibatnya parameter variasional A dan a memenuhi sistem

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{u_4}{A} \right) &= 0, \\
 \operatorname{Re} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} -n^2 u_4 \right) &= 0.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Karena kompleksitas perhitungannya, solusi stasioner \mathbf{x}^* diperoleh dengan menyelesaikan sistem (21) secara numerik.

Terakhir, akan dilakukan analisis kestabilan solusi stasioner \mathbf{x}^* . Berdasarkan persamaan (20), matriks \mathbf{M} merupakan matriks yang simetris dan bersifat *full rank* sehingga \mathbf{M} mempunyai matriks invers, \mathbf{M}^{-1} . Misalkan

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

dengan $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), F_3(\mathbf{x}), F_4(\mathbf{x}), F_5(\mathbf{x}), F_6(\mathbf{x})]^T$, maka sistem (20) dapat ditulis kembali menjadi

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}). \tag{22}$$

Matriks Jacobian untuk sistem (22) kemudian dievaluasi di titik $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$. Selanjutnya dengan menentukan nilai eigen dari matriks Jacobian, maka kestabilan solusi soliton stasioner dapat diketahui.

Untuk menentukan solusi soliton *onsite* secara numerik, misalkan $N = 10$ dan sebagai tebakan awal digunakan $\mathbf{x}(0) = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]^T$ pada saat $\varepsilon = 0$. Solusi yang diperoleh kemudian digunakan sebagai tebakan awal untuk $\varepsilon > 0$ secara iteratif atau berkelanjutan. Toleransi galat yang diizinkan untuk iterasi adalah $\epsilon = 10^{-13}$. Selanjutnya, untuk menganalisis kestabilan solusi soliton secara numerik, dengan menuliskan $\zeta(t) = (\eta_n + i\xi_n)e^{\lambda t}$ diperoleh masalah nilai eigen berikut:

$$\lambda \begin{bmatrix} \eta_{-N} \\ \vdots \\ \eta_0 \\ \vdots \\ \eta_N \\ \vdots \\ \xi_{-N} \\ \vdots \\ \xi_0 \\ \vdots \\ \xi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{-N} \\ \vdots \\ \eta_0 \\ \vdots \\ \eta_N \\ \vdots \\ \xi_{-N} \\ \vdots \\ \xi_0 \\ \vdots \\ \xi_N \end{bmatrix},$$

dimana

$$E_{11} = E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(2N+1) \times (2N+1)},$$

$$E_{12} = \begin{bmatrix} \mu_{-N}^1 & \rho_{-N+1} & 0 & \dots & v_{-N} \\ \rho_{-N} & \mu_{-N+1}^1 & \rho_{-N+2} & \dots & \dots \\ 0 & \ddots & \mu_0^1 + v_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \rho_{N-2} & \mu_{N-1}^1 & \rho_N \\ v_N & \dots & 0 & \rho_{N-1} & \mu_N^1 \end{bmatrix}_{(2N+1) \times (2N+1)},$$

$$E_{21} = \begin{bmatrix} \mu_{-N}^2 & \rho_{-N+1} & 0 & \dots & v_{-N} \\ \rho_{-N} & \mu_{-N+1}^2 & \rho_{-N+2} & \dots & \dots \\ 0 & \ddots & \mu_0^2 + v_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \rho_{N-2} & \mu_{N-1}^2 & \rho_N \\ v_N & \dots & 0 & \rho_{N-1} & \mu_N^2 \end{bmatrix}_{(2N+1) \times (2N+1)},$$

dengan

Original Article

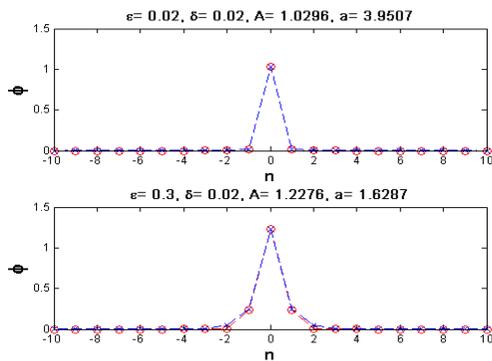
$$\mu_n^1 = -2\varepsilon - 1 + \frac{\delta}{2}\psi_{-n}(\psi_{n+1} + \psi_{n-1}),$$

$$\mu_n^2 = 2\psi_n\psi_{-n}(\delta - 1) - \mu_n^1,$$

$$\rho_n = \varepsilon + \frac{\delta}{2}\psi_{-n}\psi_n,$$

$$v_n = \psi_n^2(\delta - 1) - \frac{\delta}{2}\psi_n(\psi_{n+1} + \psi_{n-1}).$$

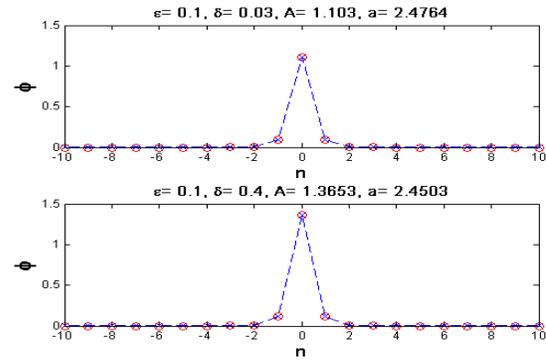
Pada bagian ini akan dibandingkan solusi soliton onsite stasioner yang diperoleh menggunakan metode AV dengan hasil-hasil numerik yang bersesuaian. Sebagai ilustrasi, hasil-hasil yang ditampilkan diperoleh untuk $N = 10$.



Gambar 1. Plot solusi soliton onsite stasioner Φ yang diperoleh menggunakan metode AV (bulat-merah) dan secara numerik (garis-silang-biru) terhadap site n ketika $\delta = 0.02$ untuk $\varepsilon = 0.02$ dan $\varepsilon = 0.3$.

Pada Gambar 1, solusi soliton onsite stasioner yang diperoleh menggunakan metode AV diplot bersamaan dengan solusi numeriknya pada bidang n vs Φ untuk beberapa nilai konstanta pengikat ε . Sebagai ilustrasi, digunakan parameter-parameter $N = 10, \delta = 0.02$, dan profil solusi yang diperoleh ketika $\varepsilon = 0.02$ dibandingkan dengan yang diperoleh ketika $\varepsilon = 0.3$. Berdasarkan gambar, dapat disimpulkan bahwa solusi soliton yang diperoleh dengan menggunakan metode AV dan secara numerik mempunyai kesesuaian yang bagus untuk nilai ε yang cukup kecil.

Solusi soliton onsite stasioner yang diperoleh menggunakan metode AV kemudian diplot bersamaan dengan solusi numeriknya untuk beberapa nilai koefisien interpolasi δ pada Gambar 2.



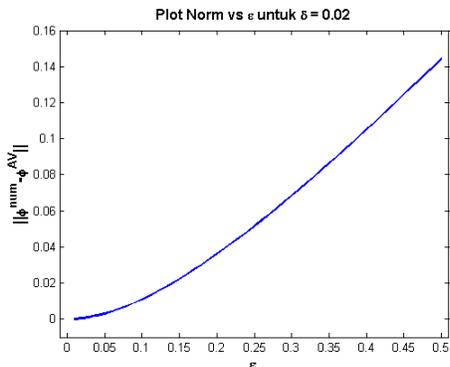
Gambar 2. Plot solusi soliton onsite stasioner Φ yang diperoleh menggunakan metode AV (bulat-merah) dan secara numerik (garis-silang-biru) terhadap site n ketika $\varepsilon = 0.1$ untuk $\delta = 0.03$ dan $\delta = 0.4$.

Sebagai ilustrasi, digunakan parameter-parameter $N = 5, \varepsilon = 0.1$, dan dibandingkan profil solusi yang diperoleh ketika $\delta = 0.03$ dibandingkan dengan yang diperoleh ketika $\delta = 0.4$. Berdasarkan gambar, dapat disimpulkan pula bahwa solusi soliton yang diperoleh dengan menggunakan metode AV dan secara numerik mempunyai kesesuaian yang bagus untuk nilai δ yang juga cukup kecil, dalam hal ini $\delta = 0.03$. Untuk nilai δ yang lebih besar, misalkan $\delta = 0.4$, hasil yang diperoleh menunjukkan untuk nilai ε yang semakin besar, profil solusi dari metode AV tidak mempunyai kesesuaian yang baik dengan hasil yang diperoleh secara numerik.

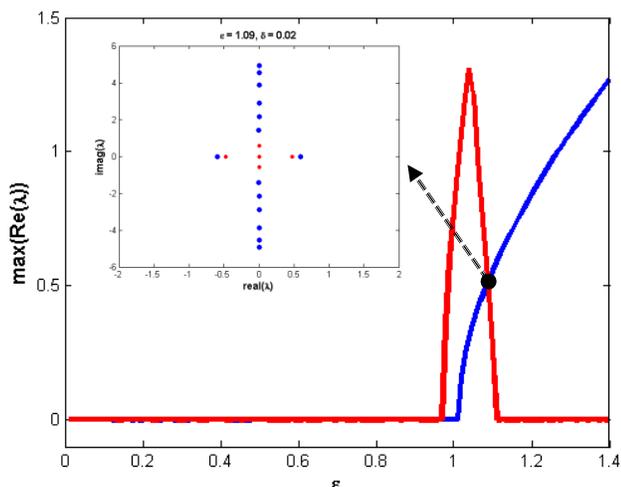
Selanjutnya, untuk mengkonfirmasi hasil-hasil yang diperoleh pada Gambar 1 dan Gambar 2, maka plot norm dari kedua solusi, dalam hal ini sebagai eror, perlu diamati. Pada Gambar 3, $norm$ atau eror didefinisikan sebagai berikut

$$\|\phi^{num} - \phi^{AV}\|$$

diplot untuk nilai koefisien interpolasi $\delta = 0.02$ untuk nilai $\varepsilon \in [0, 0.5]$. Dapat dilihat bahwa untuk nilai ε yang cukup besar, dalam hal ini $\varepsilon = 0.5$ maka diperoleh eror melebihi 0.14. Sedangkan untuk $\varepsilon \rightarrow 0$, eror yang diperoleh juga mendekati 0. Berdasarkan hasil ini, dapat dikonfirmasi bahwa profil solusi yang diperoleh dengan menggunakan metode AV mempunyai kesesuaian yang cukup bagus dengan hasil-hasil numerik untuk nilai ε dan δ yang cukup kecil.



Gambar 3. Plot galat antara solusi soliton onsite stasioner Φ yang diperoleh menggunakan metode AV dan secara numerik terhadap konstanta pengikat ϵ untuk $\delta = 0.02$.



Gambar 4. Analisis kestabilan solusi soliton onsite dilihat dari perbandingan antara nilai maksimum bagian riil nilai eigen yang diperoleh dengan menggunakan metode AV (merah) dan secara numerik (biru) untuk $\delta = 0.02$.

Terakhir, analisis kestabilan solusi soliton onsite dapat dilakukan dengan menyelesaikan masalah nilai eigen yang muncul berdasarkan konstruksi metode AV dan secara numerik. Hasil perolehan nilai maksimum dari bagian riil nilai eigen λ diplot pada bidang 2D dengan konstanta pengikat ϵ sebagai absisnya untuk koefisien interpolasi $\delta = 0.02$ dapat dilihat pada Gambar . Pada gambar, metode AV dengan tepat dapat memprediksi

stabilitas yang diperoleh secara numerik ketika $0 < \epsilon < 0.98$ untuk kestabilan. Di lain pihak, untuk ketidakstabilan terdapat kesesuaian yang bagus antara hasil metode AV dan hasil numerik ketika $1 < \epsilon < 1.1$, terutama ketika $\epsilon \approx 1.09$ dimana metode AV dengan akurat mampu menghampiri nilai eigen yang diperoleh secara numerik. Namun untuk nilai ϵ selain yang disebutkan di atas, metode AV tidak dapat digunakan untuk menghampiri kestabilan solusi soliton onsite secara numerik.

Kesimpulan

Metode AV cukup bagus dalam memprediksi solusi soliton onsite stasioner secara numerik, terutama untuk nilai konstanta pengikat ϵ dan koefisien interpolasi δ yang cukup kecil. Metode AV juga cukup bagus dalam memprediksi kestabilan soliton onsite yang diperoleh secara numerik untuk nilai konstanta pengikat ϵ dan koefisien interpolasi δ yang cukup kecil.

Konflik Kepentingan

Tidak ada konflik kepentingan yang dinyatakan.

Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Dr. Mahdhivan Syafwan atas bimbingannya sehingga makalah ini dapat disusun dengan baik.

Referensi

- [1] H.S. Eisenberg, Y. Silberberg, R. Morandotti, A. R. Boyd, dan J.S. Aitchison, "Discrete Spatial Optical Solitons in Waveguide Arrays," Phys.Rev. Lett. 81, pp. 3383, 1998.
- [2] P. G. Kevrekidis, Discrete Nonlinear Schrödinger Equation: Mathematical Analysis, Numerical Computations and Physical Perspectives. Berlin: Springer, 2009.
- [3] A. M. Wazwaz, Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory, Berlin: Springer, 2009.
- [4] M. J. Ablowitz, dan J. F. Ladik, "Nonlinear differential-difference equations," J. Math. Phys. 16, pp. 598, 1976.

Original Article

- [5] R. S. MacKay, dan S. Aubry, "Proof of existence of breathers for time-reversible or Hamiltonian networks of weakly coupled oscillators," *Nonlinearity*. 7, pp. 1623-1643, 1994.
- [6] M. Kot, *A First Course in the Calculus of Variations*. Rhode Island: American Mathematical Society, 2000.
- [7] B. A. Malomed, "Variational Methods in Nonlinear Fiber Optics and Related Fields," *Prog. Opt*, pp. 43: 69, 2002.
- [8] R. Rusin, R. Kusdiantara, dan H. Susanto, "Variational approximations using Gaussian ansatz, false instability, and its remedy in nonlinear Schrödinger lattices," *Phys. Rev. E*. 87: 063202, 2018.
- [9] K. A. Sarma, M. A. Miri, Z. H. Musslimani, dan N. D. Christodoulides, "Continuous and discrete Schrödinger systems with parity-time symmetric nonlinearities," *Phys. Rev. E*. 89: 052918, 2014.
- [10] G. Putra, M. Syafwan, dan H. Susanto, "Aproksimasi Variasional untuk solusi soliton pada persamaan Schrödinger nonlinier diskrit nonlocal," *Jurnal Matematika Unand*. Vol. 5 No. 3, pp. 40-46, 2016.
- [11] G. Putra, M. Syafwan, dan Haripamyu, "The existence and stability of onsite solitons in a discrete nonlinear nonlocal Schrödinger equation," *J. Phys. Conf. Ser.* 1554: 012046, 2020.