Original Article

e-ISSN: 2274-2067 - https://journal.itera.ac.id/index.php/indojam/
p-ISSN: 2274-2016

Received 5th June 2021
Accepted 2nd March 2022
Published 15th April 2022

Open Access

Metode Runge-Kutta Orde 4 Dalam Penyelesaian Persamaan Gelombang 1D Syarat Batas Dirichlet

Yenci Brika Enkekes [a], Lutfi Mardianto [*a]

[a] *Program Studi Matematika, Institut Teknologi Sumatera, Lampung Selatan 35365, Indonesia*

*Corresponding E-mail: *lutfi.mardianto@ma.itera.ac.id*

Abstract: The problem studied in this study was the movement of deviations in the equation of 1D waves on the rope given the initial deviation value. In this study, the equation of 1D waves with dirichlet boundary problems will be solved analytically using variable and numerical separation using the runge-kutta method approach of order 4. This research begins with examining equation models, solving analytical solutions, applying schemes to the final results of simulations. The decrease in equation model fissile is done by reviewing the working force on a piece of rope, solving an analytical solution with a variable separation method, and numerical completion resulting in the best simulation result with parameter c= 0.5 with time steps Δx= 0.01 and time interval of 0 ≤ t≤ 1 resulting in a numerical approach close to its analytical solution up to t= 1 s and the influence of parameter c on the movement of wave deviations resulted in that the influence of parameter c affects the magnitude of the deviation of the wave, so the greater the value of parameter c, the smaller deviation of the wave and the faster the speed of the direction. Thus, it can be concluded that the runge-kutta method of order 4 in this study can be said to be one of the numerical approaches of the problem of 1D wave equations with dirichlet boundaries.

Keywords: *differential equations, wave equations, dirichlet boundaries, runge-kutta method order 4.*

Abstrak: Masalah yang diteliti pada penelitian ini adalah pergerakan simpangan pada persamaan gelombang 1D pada tali yang diberikan nilai simpangan awal. Pada penelitian ini, persamaan gelombang 1D dengan masalah batas dirichlet akan diselesaikan secara analitik menggunakan separasi variabel dan numerik menggunakan pendekatan metode runge-kutta orde 4. Penelitian ini diawali dengan mengkaji model persamaan, penyelesaian solusi analitik, mengaplikasikan skema hingga sampai pada hasil akhir simulasi. Penurunan fisis model persamaan dilakukan dengan meninjau gaya yang bekerja pada sepenggal tali, penyelesaian solusi analitik dengan metode separasi variabel, dan penyelesaian numerik menghasilkan hasil simulasi terbaik dengan parameter $\boldsymbol{c = 0.5}$ dengan langkah waktu $\boldsymbol{\Delta x = 0,01}$ serta interval waktu $\boldsymbol{0 \leq t \leq 1}$ yang menghasilkan pendekatan numerik yang dekat dengan solusi analitiknya sampai pada $\boldsymbol{t = 1\ s}$ serta pengaruh parameter $\boldsymbol{c}$ pada pergerakan simpangan gelombang menghasilkan bahwa pengaruh parameter $\boldsymbol{c}$ memengaruhi besarnya dari simpangan gelombangnya, sehingga semakin besar nilai parameter $\boldsymbol{c}$ maka simpangan gelombangnya akan semakin kecil atau kecepatan arah rambatnya semakin cepat. Jadi, dapat disimpulkan bahwa metode runge-kutta orde 4 dalam penelitian ini dapat dikatakan sebagai salah satu pendekatan numerik dari masalah persamaan gelombang 1D dengan batas dirichlet.

Kata Kunci: *persamaan diferensial, persamaan gelombang, batas dirichlet, metode runge-kutta orde 4*

PENDAHULUAN

Persamaan Diferensial merupakan ilmu matematika yang dapat digunakan untuk masalah-masalah dalam kehidupan sehari-hari, diantaranya yakni permodelan penyakit, perambatan panas pada batang logam, sistem kerja pada pegas dan permodelan gelombang air laut. Persaman Diferensial secara umum dibedakan menjadi

Original Article

dua, yaitu Persamaan Diferensial Biasa dan Persamaan Diferensial Parsial. Persamaan Diferensial Biasa adalah persamaan diferensial yang hanya memuat turunan yang terdiri dari satu atau lebih variabel tak bebas dengan satu variabel bebas, sedangkan Persamaan Diferensial Parsial adalah persamaan diferensial yang memuat turunan parsial satu atau lebih variabel tak bebas terhadap dua atau lebih variabel bebas (Ross,2004:4). Banyak terdapat kasus dalam bentuk Persamaan Diferensial Parsial, diantaranya pada permodelan persamaan panas, persamaan laplace, dan persamaan gelombang, maka dari itu penulis tertarik untuk membahas hal tersebut, yang menarik perhatian penulis yaitu persamaan gelombang. Salah satu contoh adalah gelombang yang terjadi pada tali. Gelombang adalah getaran yang merambat, setiap titik yang dilalui gelombang terjadi getaran, dan getaran tersebut berubah fase sehingga tampak sebagai getaran yang merambat. Berdasarkan arah rambat gelombang, gelombang tali tergolong jenis gelombang transversal yakni gelombang yang arah rambatnya tegak lurus dengan arah arah

rambatnya (Halliday, R.1985:610). Contoh lain adalah gempa bumi, dimana daratan atau batuan merupakan mediumnya. Arah getarannya tegak lurus dengan arah rambatnya yang menyebabkan dataran berguncang yang merusak seluruh permukaan disetap jalur arah rambatnya. Ombak atau gelombang pada air juga merupakan jenis gelombang transversal. Harapannya, fenomena gelombang yang terjadi pada tali juga tidak akan jauh berbeda dengan fenomena gempa bumi dan gelombang air.

Penyelesaian analitik persamaan gelombang dapat menggunakan metode separasi variabel. Metode separasi variabel adalah suatu metode yang digunakan untuk mengubah suatu persamaan diferensial parsial kedalam persamaan diferensial biasa dengan cara memisahkan solusi persamaan diferensial parsial menjadi fungsi-fungsi yang memuat satu variabel. Setelah diperoleh persamaan diferensial biasa, kemudian diselesaikan dengan integral biasa. Berdasarkan langkah tersebut diperoleh solusi umum dari persamaan diferensial parsial. Untuk memperoleh solusi khusus, maka diperlukan nilai awal dan syarat batas dimana syarat batas yang digunakan adalah syarat batas Dirichlet $u(0,t)=u(L,t)=0$, yaitu nilai suatu fungsi yang tetap pada batasnya. Selain menggunakan penyelesaian analitik, persamaan gelombang dapat diselesaikan dengan penyelesaian numerik. Metode numerik merupakan suatu cabang ilmu matematika, khususnya matematika rekayasa yang menggunakan bilangan untuk menirukan proses matematik, proses matematik ini selanjutnya telah dirumuskan untuk menirukan keadaan sebenarnya (Harijono Djojodihardjo,2000:1). Metode Runge-Kutta orde 4 merupakan metode numerik yang sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Berdasarkan ekspansi fungsi dari Deret Taylor, Metode Runge-Kutta orde 4 memiliki galat pemotongan yang minimum sehingga menghasilkan solusi yang baik. Pembahasan dalam laporan ini terbatas pada masalah-masalah satu dimensi. Laporan ini akan mengkaji permodelan persamaan gelombang beserta penyelesaian numerik dengan menggunakan Metode Runge-Kutta orde 4 dengan dimensi $0 \leq x \leq 2\pi$ dan konstanta $c=1$. Berdasarkan latar belakang tersebut, penulis tertarik untuk melakukan penelitian dengan judul "Metode Runge-Kutta Orde 4 Dalam Penyelesaian Persamaan Gelombang 1D Syarat Batas Dirichlet".

METODE

Pemisah Variabel

Metode Pemisah variabel atau separasi variabel adalah teknik klasik yang efektif untuk menyelesaikan beberapa tipe dari persamaan diferensial parsial. Misalnya saja solusi $u(x,t)$ untuk persamaan diferensial parsial. Untuk menentukan solusi $u(x,t)$ bisa ditulis dengan

$$u(x,t)=X(x)T(t). \qquad (1)$$

Selanjutnya dilakukan substitusi dari bentuk tersebut ke persamaan diferensial. Dengan cara ini akan dihasilkan solusi persamaan untuk persamaan diferensial parsial (Nagle, dkk., 2012).

Runge-Kutta Orde 4

Metode Runge-Kutta Orde Empat adalah suatu metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai awal atau masalah nilai batas pada persamaan diferensial linier ataupun non linier. Metode Runge-Kutta Orde Empat mempunyai persamaan yaitu

$$t_{i+1} = t_i + u(x_i, t_i)h \tag{2}$$

dengan

t_i : nilai sebelumnya
t_{i+1} : nilai selanjutnya dengan ukuran langkah h
h : ukuran langkah

dan $u(x_i, t_i, h)$ disebut suatu fungsi *increment* yang dapat di interpretasikan sebagai suatu fungsi *slope* rata-rata sepanjang interval. Fungsi *increment* dapat ditulis dalam bentuk umum sebagai berikut.

$$u(x_i, t_i) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{3}$$

dengan setiap nilai k besarnya adalah:

$$k_1 = f(x_i, t_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, t_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, t_i + \frac{1}{2}k_2 h\right)$$

$$k_4 = f(x_i + h, t_i + k_3 h)$$

Semua nilai $\boldsymbol{k}$ berhubungan secara rekurensi, artinya $\boldsymbol{k_1}$ muncul dalam persamaan untuk $\boldsymbol{k_2}$, yang muncul lagi dalam persamaan $\boldsymbol{k_3}$ dan seterusnya. Rekurensi ini membuat Metode Runge-Kutta efisien untuk kalkulasi oleh komputer (Hagni Wijayanti, dkk, 2011:48)

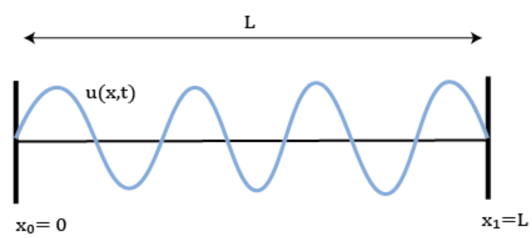
Tahapan Penelitian

Tahapan yang dilakukan dalam penelitian adalah sebagai berikut.

1. Mengkaji model persamaan gelombang.
   Pada tahap ini akan dikaji penurunan fisis persamaan gelombang.
2. Menyelesaikan solusi analitik dari persamaan gelombang.
   Solusi analitik dari persamaan gelombang akan diselesaikan dengan menggunakan metode separasi variabel.
3. Menyelesaikan solusi numerik dari persamaan gelombang
   Pada tahap ini akan dilakukan pereduksian persamaan, *diskritisasi*, dan pengaplikasian metode runge-kutta orde 4 pada persamaan gelombang 1D.
4. Membuat algoritma program.
   Pada tahap ini, model akan diselesaikan secara numerik pada permasalahan Persamaan Gelombang 1D dengan syarat batas dirichlet.
5. Membuat program.
   Algoritma yang telah dibuat diimplementasikan dalam bentuk progam dengan menggunakan software MATLAB.
6. Menjalankan program dan simulasi.
   Program yang telah dibuat dijalankan dengan menyesuaikan batasan masalah dalam penelitian ini dan selanjutnya dianalisis hasil numeriknya.
7. Verifikasi hasil program.
   Pada hasil output program diverifikasi kembali.
8. Analisis hasil dan pembahasan.
   Hasil yang diperoleh dari beberapa simulasi yang dilakukan akan dianalisis dan dibahas, untuk kemudian dicari solusi numerik terbaik dari. Selanjutnya dibuat kesimpulan dari hasil penelitian
9. Penyusunan laporan dan jurnal.
   Hasil penyelesaian model Persamaan Gelombang 1D pada penelitian ini disusun dan ditulis.

HASIL DAN PEMBAHASAN

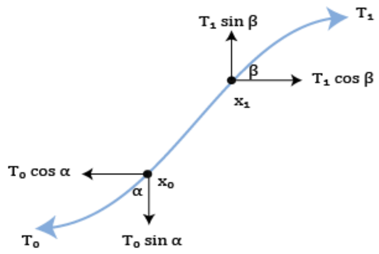
Model Persamaan Gelombang Tali



Gambar 1. Gelombang Tali Diikat pada Kedua Ujung

Original Article

Asumsikan bahwa massa jenis adalah konstan dan gaya gravitasi diabaikan, maka



Gambar 2. Gaya yang Bekerja pada Sepenggal Tali

Berdasarkan Gambar 2. Pada ujung $x = x_0$ bekerja gaya tegang T_0 yang membentuk sudut α terhadap sumbu datar, dan pada ujung $x = x_1$ bekerja gaya tegang T_1 yang membentuk sudut β terhadap sumbu datar dan berlaku $T_0 \cos\alpha = T_1 \cos\beta$ dan dinamakan dengan tegangan tali T maka diperoleh

$$T_0 \cos\alpha = T_1 \cos\beta = T$$

Sedangkan gaya yang bekerja pada sumbu tegak adalah Hukum Newton, sehingga

$$T_1 \sin\beta - T_0 \sin\alpha = \rho(x_1 - x_0)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (4)$$

ρ menyatakan rapat massa tali, dan u menyatakan simpangan tali.
Dengan membagi semua suku pada persamaan (4) dengan T maka dari diperoleh

$$\frac{T_1 \sin\beta}{T_1 \cos\beta} - \frac{T_0 \sin\alpha}{T_0 \cos\alpha} = \frac{\rho}{T}\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\tan\beta - \tan\alpha = \frac{\rho}{T}\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Karena $\tan\theta = \frac{\partial u}{\partial x}$ maka:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_1} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_0} = \frac{\rho}{T}\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Perhatikan $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_1} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_0}$ dengan ekspansi Deret Taylor diperoleh

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x} + \left.\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x}\Delta x + \left.\frac{\Delta x}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x} + \cdots$$

Perhatikan bahwa $\Delta x \to 0$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x} = \left.\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x}\Delta x$$

sehingga

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (5)$$

Karena $\rho > 0$ dan $T > 0$ maka dapat dibuat $c^2 = {T}/{\rho}$ maka persamaan (4.2) menjadi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (6)$$

Persamaan (6) dikenal sebagai persamaan getaran tali, atau persamaan gelombang. Getaran naik turun pada tali menimbulkan adanya perambatan gelombang pada tali. Jenis persamaan ini adalah Persamaan Diferensial Parsial Linier Orde 2 Homogen.

Solusi Analitik Model Persamaan

Merujuk pada persamaan (1) maka

$u_t = XT'$, $u_x = X'T$ dan $u_{tt} = XT''$, $u_{xx} = X''T$

substitusi bentuk tersebut ke persamaan (1) diperoleh

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X} \qquad (7)$$

Persamaan (7) hanya mungkin jika masing-masing X dan T konstan, sebutlah λ maka

$$\frac{T''}{c^2 T} = \lambda \; dan \; \frac{X''}{X} = \lambda$$

Atau dalam kata lain diperoleh dua persamaan diferensial, yakni

$$X'' - \lambda X = 0 \; dan \; T'' - c^2\lambda T = 0 \qquad (8)$$

Selanjutnya, tentukan λ dan $X(x), T(t) \neq 0$ agar berlaku persamaan (8) maka tinjau nilai λ untuk masing-masing adalah $\lambda = 0, \lambda > 0, dan\ \lambda < 0$

a. $\lambda = 0$ maka $X'' = 0$ dan $X(x) = ax + b$
Dengan syarat batas $u(0,t) = u(2\pi, t) = 0$ maka $a, b = 0$ dan solusi $X(x) = 0$
b. $\lambda = p^2 > 0$ maka $X'' - p^2 X = 0$ dengan persamaan karakteristik diperoleh $\alpha = \pm p$ dan solusi $X(x) = ae^{px} + be^{-px}$

Original Article

Dengan syarat batas $u(0,t) = u(2\pi,t) = 0$ maka $a,b = 0$ dan solusi $X(x) = 0$

c. $\lambda = -p^2 < 0$ maka $X'' + p^2X = 0$ dengan persamaan karakteristik diperoleh $\alpha = \pm ip$ dan solusi $X(x) = Acos(px) + Bsin(px)$
Dengan syarat batas $u(0,t) = u(2\pi,t) = 0$ maka $A = 0, Bsin(pL) = 0$ dan artinya $p = \frac{n\pi}{L}$ maka solusi $X_n(x) = Bsin\left(\frac{n\pi}{L}\right)x$

Dari ketiga nilai λ pilih solusi $X_n(x) = Bsin\left(\frac{n\pi}{L}\right)x$ dan untuk solusi $T(t)$ pilih $\lambda = -p^2 = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ maka solusi $T(t)$ adalah

$$T_n(t) = Acos\left(\frac{cn\pi}{L}\right)t + Bsin\left(\frac{cn\pi}{L}\right)t$$

maka solusi persamaan berubah menjadi

$$u_n(x,t) = \left(Acos\left(\frac{cn\pi}{L}\right)t + Bsin\left(\frac{cn\pi}{L}\right)t\right)Bsin\left(\frac{n\pi}{L}\right)x$$

Karena persamaan bersifat linier maka $\{u_n(x,t)\}$ sebagai solusi dikombinasikan, sehingga menghasilkan

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n cos\left(\frac{cn\pi}{L}\right)t + B_n sin\left(\frac{cn\pi}{L}\right)t\right)sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)x \quad (9)$$

Dengan batasan masalah yang ada maka solusi khusus persamaan sebagai berikut

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, sin\left(\frac{n\pi}{2\pi}\right)x = \sin(x)$$

Hanya mungkin

$$A_n = \begin{cases} 1, & untuk\ n = 2 \\ 0, & untuk\ n = lainnya \end{cases}$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi}{2\pi} sin\left(\frac{n\pi}{2\pi}\right)x = 0, \text{maka } B_n = 0$$

Maka solusi khusus dari persamaan (6) dengan memangkas $n \geq 2$ adalah

$$u(x,t) = \cos(ct)\, sin(x)$$

Solusi Numerik Model Persamaan

Persamaan (6) merupakan persamaan diferensial linier orde dua. Agar dapat diselesaikan dengan menggunakan skema metode Runge-Kutta orde 4, maka persamaan (6) direduksi menjadi sistem persamaan diferensial linier orde satu. dimisalkan bahwa

$$\frac{\partial u}{\partial \mathrm{t}} = v$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{dv}{dt}$$

dengan demikian persamaan (6) direduksi menjadi sistem persamaan diferensial sebagai berikut.

$$\frac{\partial u}{\partial \mathrm{t}} = v \quad (10a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (10b)$$

Dikritisasi Model Persamaan

u adalah fungsi yang bergantung pada x dan t menggunakan formula Deret Taylor, akan dikontruksi turunan parsial u terhadap x. Dalam skema numerik, variabel x dipartisi menjadi diskrit yang disebut *grid*, $x_1, x_2, \dots, x_N$ dan t dipartisi pada level $0 = t_0, t_1, t_2, \dots, t_M$. Jika Δx diasumsikan konstan dan $x_{i+1} = x_i + \Delta x$ maka persamaan (10a) dan (10b) menjadi
menjadi

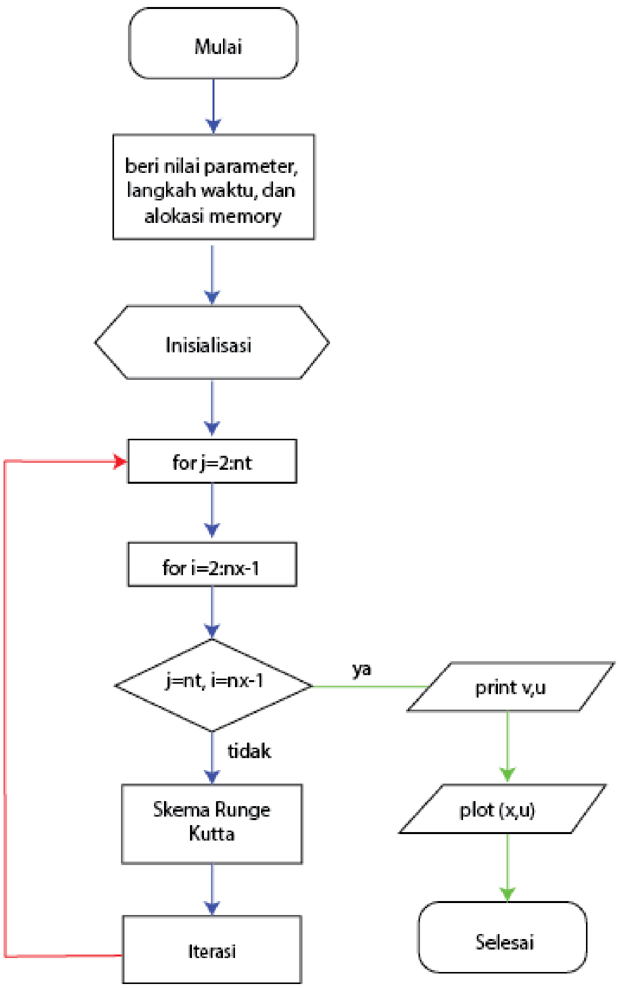
$$\frac{\partial u}{\partial \mathrm{t}} = v \quad (11a)$$

$$\frac{dv}{dt} = c^2\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} \quad (11b)$$

Published by: Lembaga Penelitian dan Pengabdian Kepada Masyarakat
Institut Teknologi Sumatera, Lampung Selatan, Indonesia

Algoritma Program

Proses *running program* untuk penelitian ini dapat dilihat pada Gambar 3 seperti berikut ini.



Gambar 3. Diagram Alir Algoritma Program

Skema Metode Runge-Kutta Orde 4

Merujuk pada persamaan (2) maka selanjutnya persamaan (11a) dan (11b) akan diselesaikan dengan pendekatan skema metode Runge-Kutta orde 4. Perhatikan bahwa hasil reduksi persamaan gelombang 1D akan menjadi sebuah sistem persamaan diferensial dimana masing-masing dari persamaannya berupa persamaan biasa linear orde 1, maka dengan skema metode Runge-Kutta orde 4 akan diperoleh fungsi *increment* untuk masing-masing persamaan hal ini dikarenakan, metode Runge-Kutta orde 4 menghitung nilai pada saat turunan pertama, maka dengan itu diperoleh dua buah fungsi *increment* sebagai berikut.

$$u_{i+1} = u_i + \frac{\Delta t}{6}(k_1u + 2k_2u + 2k_3u + k_4u)$$

$$v_{i+1} = v_i + \frac{\Delta t}{6}(l_1v + 2l_2v + 2l_3v + l_4v)$$

dengan setiap nilai k dan l besarnya adalah

$$k_1u = v_i$$

$$l_1v = c^2\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

$$k_2u = v_i + \frac{\Delta x}{2}k_1u$$

$$l_2v = c^2\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

$$k_3u = v_i + \frac{\Delta x}{2}k_2u$$

$$l_3v = c^2\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

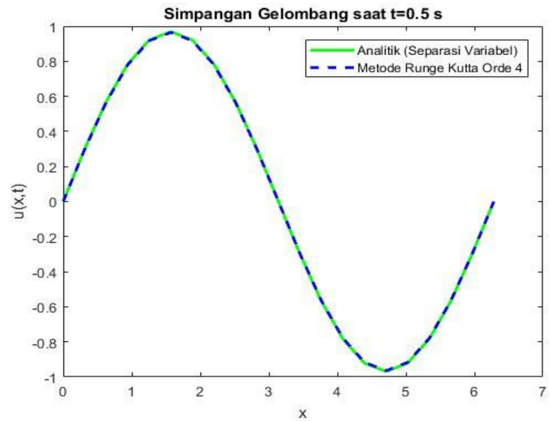
$$k_4u = v_i + \Delta x\, k_3u$$

$$\boldsymbol{l_4v = c^2\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}}$$

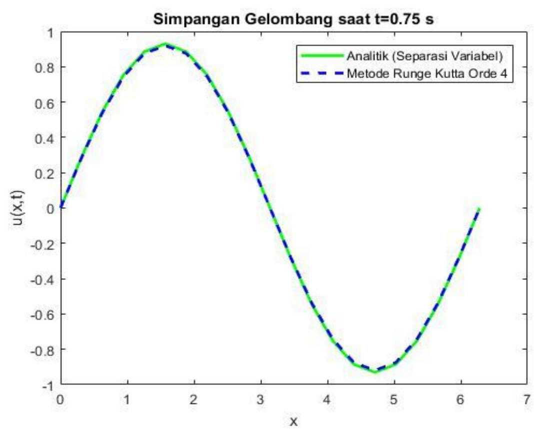
Syarat batas yang digunakan untuk simulasi dalam penelitian ini adalah syarat batas Dirichlet $u(0,t) = u(2\pi,t) = 0$ dengan $\Delta x = {}^{\pi}/_{10}$ dan $\Delta t = 0{,}01$.

Simulasi pada MATLAB dilakukan dengan cara mengganti nilai parameter c dan diverifikasi atau dipilih yang paling mendekati solusi analitiknya pada solusi separasi variabel, pada Gambar 4 parameter c yang dipilih adalah sebesar 0.5 sehingga mendekati solusi pendekatan numerik yang dekat dengan solusi analitiknya, dengan menggunakan langkah waktu $\Delta t = 0{,}01$ pada saat $t = 0{,}5$ solusi pendekatan numerik masih dekat dengan solusi analitiknya.

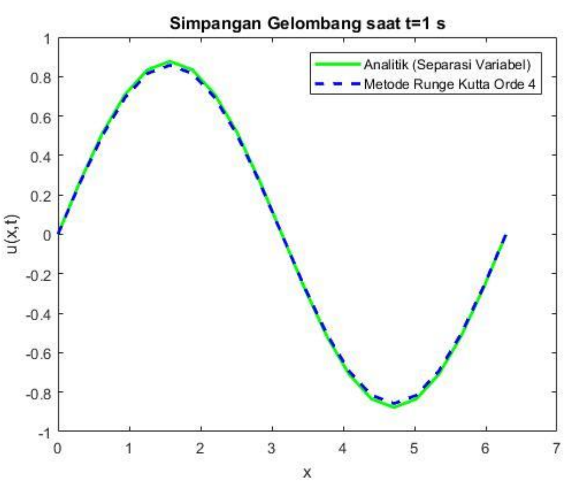
Original Article



Gambar 4. Hasil Pendekatan Metode Runge Kutta Orde 4 saat t=0.5 s



Gambar 5. Hasil Pendekatan Metode Runge Kutta Orde 4 saat t=0.75 s



Gambar 6. Hasil Pendekatan Metode Runge Kutta Orde 4 saat t=1 s

Begitu juga pada Gambar 5 dan Gambar 6 solusi pendekatan numerik yang dihasilkan masih dekat dengan solusi analitiknya, jika diperhatikan solusi pendekatan numerik yang dihasilkan akan menurun dari solusi awalnya hal ini bahwa pergerakan simpangan gelombang pada saat mendekati nilai batas akan berisolasi kembali menuju batas gelombang yang lain serta diberikan simpangan awal tanpa diberikan kecepatan maka tali akan berosilasi mengikuti simpangan awal tersebut dan merupakan jenis gelombang stasioner yaitu gelombang yang amplitudonya di setiap titik besarnya tidak sama, terlihat bahwa pada simulasi amplitudonya di setiap titik besarnya tidak sama. Hal ini diperkuat dengan perbandingan kesalahan dengan perhitungan *root mean square error* (RSME) seperti pada Tabel 1.

Tabel 1. Perbandingan RSME dengan nilai t yang berbeda antara solusi analitik dan solusi numerik dengan metode Runge-Kutta Orde 4

No	t	RMSE
1	0.5	0.0197
2	0.75	0.0461
3	1	0.0814

Pengaruh Parameter c

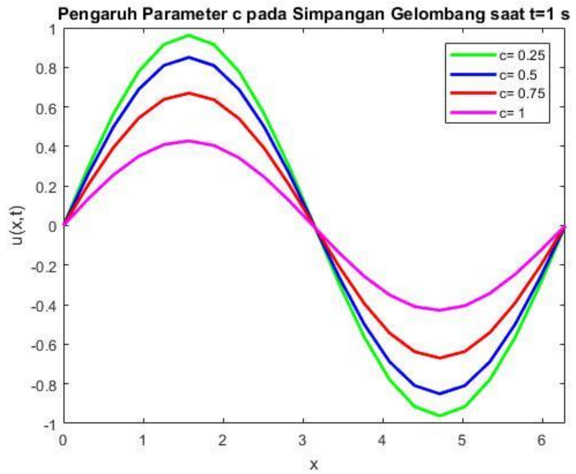
Persamaan (6) adalah persamaan gelombang 1D dengan hanya ada parameter $c^2 = {}^{T}/_{\rho}$ yang dalam kata lain merupakan cepat arah rambat gelombang. Pada simulasi pengaruh parameter c akan digunakan 4 nilai parameter c dan akan diteliti pada saat $t = 1\,s$. Perhatikan hasil simulasi MATLAB seperti pada Gambar 7.

Hasil simulasi pengaruh parameter c menghasilkan bahwa pengaruh parameter c memengaruhi besarnya dari simpangan gelombangnya. Jadi, semakin besar nilai parameter c maka simpangan gelombangnya akan semakin mengecil. Parameter c pada persamaan gelombang yang merupakan cepat rambat geloyang menjelaskan bahwa kecepatan gelombang pada tali, semakin besar kecepatan gelombang, maka akan

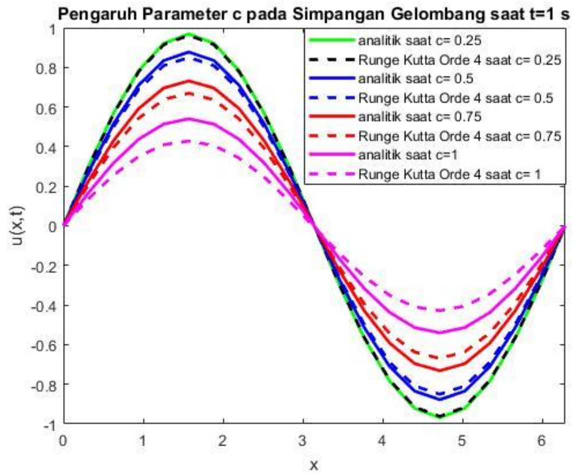
Published by: Lembaga Penelitian dan Pengabdian Kepada Masyarakat
Institut Teknologi Sumatera, Lampung Selatan, Indonesia

Original Article

semakin cepat arah rambatnya dan pada simulasi membuat simpangan gelombangnya semakin kecil.



Gambar 7. Pengaruh Parameter c terhadap Simpangan Gelombang $u(x,t)$



Gambar 8. Pengaruh Parameter c dengan Solusi Analitik

Hasil simulasi pengaruh parameter c dengan solusi analitik yang dihasilkan dengan metode separasi variabel menghasilkan bahwa pengaruh parameter c memengaruhi galat dari solusi pendekatan numerik yang dihasilkan dengan skema metode Runge-Kutta orde 4 seperti yang ditampilkan pada Gambar 8. Jadi, semakin besar nilai parameter c maka akan mengakibatkan solusi pendekatannya akan jauh dengan solusi analitiknya sehingga simpangan gelombangnya akan semakin mengecil dan menyebabkan nilai galatnya akan besar.

Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan dapat disimpulkan bahwa

1. Penyelesaian persamaan gelombang 1D secara analitik dengan menggunakan metode separasi variabel dengan batasan masalah yang ada menghasilkan solusi khusus dengan memangkas $n \geq 2$ yaitu

$$u(x,t) = \cos(ct)\, sin(x)$$

2. Penyelesaian persamaan gelombang 1D secara numerik dengan menggunakan metode runge-kutta Orde 4 dengan batasan masalah yang ada menghasilkan hasil simulasi MATLAB terbaik dengan parameter $c = 0.5$ dan langkah waktu $\Delta t = 0{,}01$ serta interval waktu $0 \leq t \leq 1$ yang menghasilkan pendekatan numerik yang dekat dengan solusi analitiknya sampai pada $t = 1\ s$.
3. Pengaruh parameter c memengaruhi besarnya dari simpangan gelombangnya, jadi semakin besar nilai parameter c maka simpangan gelombangnya akan semakin kecil.

Referensi

[1] S. M. Hemmingsen, Soft Science. Saskatoon: University of Saskatchewan Press, 1997.

[2] Ross, S.L. (2004). *Differential Equation*. New York: John Wiley & Sons

[3] Resnick, Halliday. (1985). *Physics*, 3^{rd}*Edition (Fisika Dasar 1 Edisi Ketiga).*

[4] Harijono Djojodiharjo Dr. Ir., (2000). *Metode Numerik*. Penerbit Erlangga-Jakarta

[5] Darmawijoyo, (2011). Persamaan Diferensial Biasa: Suatu Pengatar. Jakarta:Erlangga

[6] Wiryanto H. Leo. *Diktat Persamaan Diferensial Parsial*. Bandung: ITB

[7] Nagle, R.K., Saff, E.B., & Snider, A.D. (2012). *Fundamental of Differential Euationn and Boundary Value Problems*. New York: Addison.

[8] Hagni Wijayanti, dkk. (2011). *Metode Runge-Kutta Dalam Penyelesaian Model Radang Akut*. Bogor: UNPAK