Original Article

e-ISSN: 2774-2016 - https://journal.itera.ac.id/index.php/indojam/
p-ISSN: 2774-2067

Received 16th July 2026
Accepted 26th October 2026
Published 31st October 2026

Open Access

DOI
https://doi.org/10.35472/indojam.v6i2.2993

Kontrol Optimal pada Model Predator–Prey dengan Respons Fungsional Holling Tipe II untuk Pengendalian Hama Berbasis Predator Alami

Dewi Suhika[a,*], Nurul Indah Safitri[a], Nela Rizka[a]

[a]*Program Studi Matematika, Fakultas Sains, Institut Teknologi Sumatera*
** Corresponding E-mail: dewi.suhika@ma.itera.ac.id*

Abstract: Plant pests are among the factors that reduce agricultural productivity, requiring effective control strategies that consider ecosystem sustainability. This study develops an optimal control model for pest and natural predator interactions by incorporating two control strategies, namely pest control and natural predator release. The model is formulated as a predator–prey system with a Holling type II functional response, considering the negative effects of pesticide application on natural predators. The objective function aims to minimize pest density, control implementation costs, and a terminal penalty on pest density. Pontryagin's Maximum Principle is applied to derive the optimality system, including the state equations, adjoint equations, transversality conditions, and optimal control characterizations. Numerical solutions are obtained using the forward-backward sweep method by comparing four scenarios: no control, pest control only, natural predator release only, and a combination of both controls. The simulation results show that pest control alone and natural predator release alone reduce final pest density by 62.96% and 74.86%, respectively, while the combined strategy achieves the greatest reduction of 85.67%. Under the combined strategy, the final pest density decreases from 1.2183 to 0.1745, while the natural predator density remains positive at 0.1153. Furthermore, the objective function value decreases from 79.7534 to 26.6926, representing a reduction of 66.53%. The model-based cost-effectiveness analysis indicates that the combined strategy achieves the lowest cost-effectiveness ratio of 0.4088. These findings suggest that combining pest control and natural predator release provides a more effective control strategy under the assumed model parameters and cost weights.

Keywords: optimal control, pests, natural predators, Pontryagin's Maximum Principle, forward-backward sweep.

Abstrak: Hama tanaman merupakan salah satu faktor yang dapat menurunkan produktivitas pertanian, sehingga diperlukan strategi pengendalian yang efektif dengan tetap mempertimbangkan keberlanjutan ekosistem. Penelitian ini mengembangkan model kontrol optimal pada dinamika interaksi hama dan predator alami melalui dua strategi pengendalian, yaitu pengendalian hama dan pelepasan predator alami. Model yang digunakan berbentuk sistem predator–prey dengan respons fungsional Holling tipe II serta mempertimbangkan dampak negatif penggunaan pestisida terhadap predator alami. Fungsi objektif dirancang untuk meminimumkan kepadatan hama, biaya pelaksanaan kontrol, dan penalti terminal terhadap kepadatan hama. Prinsip Maksimum Pontryagin digunakan untuk memperoleh sistem optimalitas yang meliputi persamaan *state*, persamaan *adjoint*, syarat transversal, dan karakterisasi kontrol optimal. Penyelesaian numerik dilakukan menggunakan metode *forward-backward sweep* dengan membandingkan empat skenario, yaitu tanpa kontrol, pengendalian hama saja, pelepasan predator alami saja, dan kombinasi kedua kontrol. Hasil simulasi menunjukkan bahwa pengendalian hama saja dan pelepasan predator alami saja masing-masing menurunkan kepadatan hama akhir sebesar 62,96% dan 74,86%, sedangkan kombinasi kedua kontrol menghasilkan penurunan terbesar sebesar 85,67%. Pada skenario kombinasi, kepadatan hama akhir menurun dari 1,2183 menjadi 0,1745, sementara kepadatan predator alami tetap positif sebesar 0,1153. Selain itu, nilai fungsi objektif menurun dari 79,7534 menjadi 26,6926 atau mengalami penurunan sebesar 66,53%. Analisis biaya-efektivitas berbasis model menunjukkan bahwa strategi kombinasi menghasilkan rasio biaya-efektivitas (CER) terendah sebesar 0,4088. Hasil tersebut menunjukkan bahwa kombinasi pengendalian hama dan pelepasan predator alami memberikan strategi pengendalian yang lebih efektif berdasarkan parameter dan bobot biaya yang diasumsikan dalam model.

Kata Kunci: *kontrol optimal, hama, predator alami, Prinsip Maksimum Pontryagin, forward-backward sweep.*

Copyright © 2026 - Indonesian Journal of Applied Mathematics.
Content from this work may be used under the terms of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International Licence. Any further distribution of this work must maintain attribution to the author(s) and the title of the work, journal citation and DOI. Published under licence by Indonesian Journal of Applied Mathematics.

Original Article

Pendahuluan

Hama tanaman merupakan salah satu ancaman utama dalam sistem pertanian karena dapat menyebabkan penurunan hasil panen dan mengganggu ketahanan pangan [1]. Permasalahan ini menjadi penting karena tumbuhan menyediakan sekitar 80% makanan yang dikonsumsi manusia dan menghasilkan sekitar 98% oksigen yang dihirup manusia. Namun, setiap tahun hingga 40% tanaman pangan global hilang akibat hama dan penyakit tanaman [2]. Data tersebut menunjukkan bahwa pengendalian hama merupakan masalah penting yang perlu dikaji secara berkelanjutan, khususnya melalui strategi yang efektif tetapi tetap memperhatikan keseimbangan ekosistem. Salah satu metode yang umum digunakan untuk menekan populasi hama adalah penggunaan pestisida [2], [3].

Pestisida dapat menurunkan populasi hama dalam waktu relatif singkat, tetapi penggunaan yang berlebihan dapat menimbulkan dampak negatif, seperti residu pada produk pertanian, pencemaran tanah dan air, gangguan kesehatan manusia, serta kematian organisme non-target. Salah satu organisme non-target yang dapat terdampak adalah predator alami hama [4], [5]. Padahal, predator alami memiliki peran penting sebagai agen pengendali biologis yang dapat membantu menekan populasi hama secara alami [4]. Verdadero dkk. (2025) menjelaskan bahwa pestisida tidak hanya membunuh hama sasaran, tetapi juga dapat merugikan organisme bermanfaat dan memicu munculnya masalah ekologis lain [4]. Sebagai alternatif terhadap penggunaan pestisida secara tunggal, pengendalian hama terpadu atau integrated pest management menjadi pendekatan yang penting. Strategi ini menggabungkan pengendalian kimia melalui pestisida dan pengendalian biologis melalui pemanfaatan predator alami [6]. Dalam kajian matematika, interaksi antara hama dan predator alami depot direpresentasikan melalui model predator–prey,

dengan hama sebagai prey dan predator alami sebagai predator atau musuh alami [6], [7]. Model ini dapat digunakan untuk memahami dinamika populasi hama, dinamika predator alami, serta pengaruh intervensi pengendalian terhadap keseimbangan sistem [8], [9], [10].

Salah satu model yang relevan dikembangkan oleh Zhou dkk. (2025), yaitu model predator–prey dengan penyemprotan pestisida nonlinear bergantung kepadatan dan pelepasan predator alami pada waktu impulsif yang berbeda [5]. Penelitian tersebut membahas kestabilan solusi periodik, permanensi sistem, ambang kepunahan hama, dan bifurkasi superkritis. Hasilnya menunjukkan bahwa jumlah maksimum predator alami yang dilepaskan, periode kontrol impulsif, dan tingkat kematian maksimum hama akibat pestisida berpengaruh terhadap dinamika sistem. Namun, penelitian tersebut masih berfokus pada sistem impulsif dan analisis dinamika, belum diformulasikan sebagai masalah kontrol optimal kontinu. Kajian kontrol optimal pada model predator–prey telah berkembang melalui berbagai pendekatan untuk mengendalikan dinamika populasi. Kebedow dkk. (2025) [11] menerapkan Prinsip Maksimum Pontryagin pada model predator–prey dengan respons fungsional Holling tipe II untuk menentukan strategi optimal dalam mengurangi penyebaran penyakit pada populasi mangsa dan predator. Sementara itu, Qiu dkk. (2024) [12] mengembangkan model predator–prey dengan infeksi pada mangsa dan efek ketakutan, serta menerapkan kontrol optimal melalui penggunaan pestisida pada mangsa dan pemberian makanan tambahan kepada predator. Kedua penelitian tersebut menunjukkan bahwa pendekatan kontrol optimal dapat diterapkan pada dinamika predator–prey melalui strategi intervensi yang berbeda. Berbeda dari penelitian sebelumnya, penelitian ini berfokus pada pengendalian hama melalui kombinasi aplikasi pestisida dan pelepasan predator alami dengan mempertimbangkan dampak negatif pestisida terhadap predator. Selain itu, fungsi tujuan dilengkapi penalti terminal untuk meminimumkan kepadatan hama pada akhir periode pengamatan.

Berdasarkan uraian di atas, penelitian ini mengembangkan model predator–prey dengan dua kontrol optimal, yaitu kontrol pengendalian hama dan

kontrol pelepasan predator alami. Kontrol pengendalian hama digunakan untuk menurunkan populasi hama secara langsung, sedangkan kontrol pelepasan predator alami digunakan untuk mempertahankan peran predator sebagai agen pengendali biologis. Model ini juga mempertimbangkan dampak negatif pestisida terhadap predator alami. Kebaruan penelitian ini terletak pada formulasi kontrol optimal kontinu yang mengadaptasi model predator–prey dengan pestisida dan pelepasan predator alami, serta penambahan penalti terminal pada populasi hama agar populasi hama pada akhir periode simulasi tetap rendah. Tujuan penelitian ini adalah merumuskan model predator–prey dengan dua kontrol optimal, menentukan karakterisasi kontrol optimal menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin, dan menganalisis pengaruh pemberian dua kontrol terhadap dinamika populasi hama dan predator alami. Hasil penelitian diharapkan dapat memberikan kontribusi dalam pengembangan strategi pengendalian hama terpadu yang lebih efektif, efisien, dan tetap memperhatikan keseimbangan ekosistem.

Model Matematika

Asumsi Model

Model matematika yang digunakan dalam penelitian ini dibangun berdasarkan interaksi antara populasi hama dan predator alami. Populasi hama berperan sebagai prey, sedangkan predator alami berperan sebagai predator atau musuh alami hama. Model ini diadaptasi dari model predator–prey yang mempertimbangkan pengendalian hama melalui penyemprotan pestisida dan pelepasan predator alami [5]. Pada model, pengendalian dilakukan secara impulsif pada waktu tertentu, sedangkan dalam penelitian ini strategi tersebut dimodifikasi ke dalam bentuk kontrol optimal kontinu agar intensitas pengendalian dapat berubah terhadap waktu. Asumsi yang digunakan adalah sebagai berikut.

1. Populasi hama pada waktu t dinyatakan dengan $x(t)$, sedangkan populasi predator alami dinyatakan dengan $y(t)$.
2. Populasi hama tumbuh secara logistik dengan laju pertumbuhan intrinsik r dan daya dukung lingkungan K.
3. Predator alami memangsa hama mengikuti respons fungsional Holling tipe II.
4. Predator alami mengalami kematian alami dengan laju d, sedangkan hama yang dimangsa dapat dikonversi menjadi pertumbuhan predator dengan tingkat konversi b.
5. Pengendalian hama dilakukan melalui kontrol $u_1(t)$, yaitu upaya untuk menurunkan populasi hama.
6. Penggunaan pestisida dapat memberikan dampak negatif terhadap predator alami, yang dinyatakan dengan parameter η.
7. Pelepasan predator alami dilakukan melalui kontrol $u_2(t)$, yaitu penambahan predator alami ke dalam sistem.
8. Semua parameter model bernilai positif, sedangkan populasi awal hama dan predator alami bernilai tidak negatif.

Model Dasar Tanpa Kontrol

Misalkan $x(t)$ menyatakan kepadatan populasi hama dan $y(t)$ menyatakan kepadatan populasi predator alami pada waktu t. Kedua variabel tersebut merepresentasikan kepadatan populasi dalam skala model matematika, bukan jumlah individu secara langsung. Mengacu pada penelitian Zhou dkk. (2025) [5], satuan fisik kepadatan populasi dan waktu tidak ditetapkan secara eksplisit dalam simulasi. Oleh karena itu, waktu t dinyatakan dalam satuan waktu model, sedangkan nilai $x(t)$ dan $y(t)$ diinterpretasikan sebagai kepadatan populasi dalam skala model. Tanpa adanya intervensi pengendalian, model predator–prey dasar diberikan oleh [5]:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx\left(1-\frac{x}{K}\right)-\frac{axy}{1+hx}, \\ \frac{dy}{dt} &= -dy+\frac{baxy}{1+hx}. \end{aligned} \qquad (1)$$

Copyright © 2026 – Indonesian Journal of Applied Mathematics

Published by: Lembaga Penelitian, Pengabdian Masyarakat, dan Penjaminan Mutu
Institut Teknologi Sumatera, Lampung Selatan, Indonesia

Original Article

Suku $rx\left(1-\frac{x}{K}\right)$ menyatakan pertumbuhan logistik populasi hama. Parameter r menyatakan laju pertumbuhan intrinsik hama, sedangkan K mmenyatakan daya dukung lingkungan bagi populasi hama. Suku $\frac{axy}{1+hx}$ menyatakan laju pemangsaan hama oleh predator alami berdasarkan respons fungsional Holling tipe II [11]. Parameter a menyatakan laju serangan predator terhadap hama, sedangkan h menyatakan parameter kejenuhan atau waktu penanganan mangsa.

Data dan Parameter

Data yang digunakan dalam penelitian ini berupa parameter simulasi yang sebagian diadaptasi dari Zhou dkk. (2025) [5] . Parameter dasar yang meliputi laju pertumbuhan intrinsik hama, daya dukung lingkungan, laju serangan predator, parameter kejenuhan respons Holling tipe II, efisiensi konversi, dan laju kematian alami predator menggunakan nilai yang bersumber dari model rujukan. Sementara itu, parameter sensitivitas predator terhadap pestisida ditetapkan sebagai asumsi dalam model kontrol kontinu dengan mengacu pada nilai parameter dampak pestisida terhadap predator pada penelitian Zhou dkk. (2025).

Waktu dalam penelitian ini dinyatakan dalam satuan waktu model karena penelitian Zhou dkk. (2025) tidak menetapkan satuan waktu fisik secara eksplisit. Oleh karena itu, $T = 50$ menunjukkan periode pengamatan selama 50 satuan waktu model, bukan secara langsung menyatakan hari, minggu, atau bulan. Sementara itu, variabel $x(t)$ dan $y(t)$ menyatakan kepadatan populasi hama dan predator alami dalam skala model, bukan jumlah individu secara langsung. Penggunaan skala tersebut didasarkan pada parameter simulasi yang belum dikalibrasi menggunakan data populasi lapangan. Definisi, nilai, dan sumber parameter model disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Definisi dan nilai parameter model

Parameter	Keterangan	Nilai	Sumber
r	Laju pertumbuhan intrinsik hama	0,5	[5]
K	Daya dukung lingkungan bagi hama	4	[5]
a	Laju serangan predator terhadap hama	0,55	[5]
h	Parameter kejenuhan respons Holling tipe II	0,15	[5]
b	Efisiensi konversi hama menjadi predator	0,65	[5]
d	Laju kematian alami predator	0,35	[5]
η	Pengaruh pestisida terhadap predator alami	0,25	[5]
T	Waktu akhir simulasi	50	Asumsi

Kondisi awal yang digunakan adalah $x(0) = 0{,}6$, dan $y(0) = 0{,}8$. Nilai tersebut menyatakan bahwa pada awal pengamatan kepadatan populasi hama sebesar 0,6, sedangkan kepadatan populasi predator alami sebesar 0,8. Kondisi awal ini juga diadaptasi dari salah satu skenario simulasi pada model rujukan.

Kontrol Optimal

Kontrol optimal merupakan salah satu cabang matematika terapan yang membahas cara menentukan suatu strategi pengendalian terbaik pada sistem dinamik [13], [14]. Sistem dinamik tersebut biasanya dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial yang

memuat variabel keadaan dan variabel kontrol. Variabel keadaan menggambarkan kondisi sistem yang berubah terhadap waktu, sedangkan variabel kontrol menyatakan intervensi yang dapat diberikan untuk mengarahkan perilaku sistem sesuai tujuan yang diinginkan [15], [16].

Salah satu metode yang banyak digunakan untuk memperoleh karakterisasi kontrol optimal adalah Prinsip Maksimum Pontryagin. Prinsip ini mengubah masalah optimasi dengan kendala persamaan diferensial menjadi suatu sistem optimalitas. Sistem optimalitas tersebut terdiri atas sistem *state*, sistem adjoint, syarat transversal, dan bentuk kontrol optimal [17], [18].

Untuk menerapkan Prinsip Maksimum Pontryagin, terlebih dahulu dibentuk fungsi Hamiltonian. Jika sistem memiliki satu variabel keadaan, maka Hamiltonian dapat ditulis sebagai berikut [13], [14]:

$$H(t,x,u,\lambda) = L(t,x,u) + \lambda f(t,x,u),$$

dengan L menyatakan fungsi biaya sepanjang interval pengamatan, f merupakan fungsi dinamika sistem, dan $\lambda(t)$ menyatakan variabel adjoint atau *costate*. Berdasarkan Prinsip Maksimum Pontryagin, sistem adjoint diperoleh melalui persamaan sebagai berikut:

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

sedangkan syarat transversal untuk fungsi biaya terminal $\Phi(x(T))$ dinyatakan sebagai berikut:

$$\lambda(T) = \partial\Phi/\partial x(T).$$

Kontrol optimal ditentukan melalui kondisi minimisasi Hamiltonian terhadap kontrol pada himpunan admissible. Apabila solusi berada pada bagian interior himpunan kontrol, kondisi stasioner $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ digunakan untuk memperoleh karakterisasi kontrol optimal.

Dalam banyak kasus, sistem optimalitas sulit diselesaikan secara analitik. Oleh karena itu, penyelesaian numerik sering digunakan. Salah satu metode numerik yang umum digunakan adalah metode *forward-backward sweep*. Pada metode ini, sistem *state* diselesaikan maju dari kondisi awal, sedangkan sistem adjoint diselesaikan mundur dari syarat transversal. Selanjutnya, kontrol diperbarui menggunakan karakterisasi kontrol optimal. Proses ini dilakukan secara iteratif sampai solusi konvergen.

Langkah-langkah metode *forward-backward sweep* adalah sebagai berikut [19]:

1. Menentukan tebakan awal untuk fungsi kontrol.
2. Menyelesaikan sistem *state* secara maju dari $t = 0$ sampai $t = T$.
3. Menyelesaikan sistem adjoint secara mundur dari $t = T$ sampai $t = 0$.
4. Memperbarui kontrol berdasarkan rumus kontrol optimal.
5. Mengulangi proses sampai selisih nilai kontrol pada dua iterasi berturut-turut cukup kecil.

Dalam penelitian ini, teori kontrol optimal digunakan untuk menentukan strategi pengendalian hama dan pelepasan predator alami pada model predator–prey. Variabel kontrol digunakan untuk menekan populasi hama dan mengatur pelepasan predator alami, sedangkan fungsi objektif disusun untuk meminimumkan populasi hama, biaya pengendalian, serta penalti terhadap populasi hama pada waktu akhir.

Kontrol Optimal Model Predator–Prey

Pada model dasar, populasi hama dan predator alami hanya dipengaruhi oleh pertumbuhan alami, kematian alami, dan interaksi pemangsaan. Namun, dalam pengendalian hama terpadu, diperlukan intervensi manusia untuk menekan populasi hama dan mempertahankan keberadaan predator alami. Pada penelitian Zhou dkk. (2025), strategi pengendalian dilakukan melalui penyemprotan pestisida dan

Copyright © 2026 – Indonesian Journal of Applied Mathematics

Published by: Lembaga Penelitian, Pengabdian Masyarakat, dan Penjaminan Mutu
Institut Teknologi Sumatera, Lampung Selatan, Indonesia

Original Article

pelepasan predator alami pada waktu impulsif tertentu. Pestisida digunakan untuk menurunkan populasi hama, tetapi juga dapat berdampak pada predator alami, sedangkan pelepasan predator alami dilakukan untuk meningkatkan populasi musuh alami hama [5].

Penelitian ini mengembangkan model predator–prey yang dikaji oleh Zhou dkk. (2025) dengan memodifikasi mekanisme pengendalian impulsif menjadi kontrol optimal kontinu . Berbeda dengan model rujukan yang menggunakan penyemprotan pestisida secara impulsif dengan efek nonlinear bergantung pada kepadatan hama, penelitian ini mengasumsikan bahwa pengendalian dilakukan secara kontinu dengan intensitas yang dapat berubah terhadap waktu. Modifikasi tersebut merupakan penyederhanaan mekanisme pengendalian untuk memungkinkan penentuan intensitas pengendalian yang optimal sepanjang periode pengamatan.

Dalam model ini, $u_1(t)$ menyatakan intensitas efektif pengendalian hama per satuan waktu, sedangkan $u_2(t)$ menyatakan laju pelepasan predator alami per satuan waktu. Pengaruh pengendalian terhadap populasi hama dinyatakan melalui suku $-u_1(t)x(t)$, dengan asumsi bahwa laju kematian hama akibat pengendalian sebanding dengan kepadatan hama dan intensitas kontrol yang diberikan. Selain menurunkan populasi hama, pengendalian kimia juga diasumsikan memberikan dampak negatif terhadap predator alami yang dinyatakan melalui suku $-\eta u_1(t)y(t)$, dengan η sebagai koefisien sensitivitas predator terhadap pengendalian. Suku tersebut menggambarkan asumsi bahwa peningkatan intensitas pengendalian dapat meningkatkan laju kematian predator alami secara proporsional. Sementara itu, suku $+u_2(t)$ merepresentasikan penambahan kepadatan predator alami secara langsung melalui proses pelepasan yang berlangsung kontinu. Secara keseluruhan, model ini mencakup pengendalian langsung terhadap hama, dampak negatif pestisida terhadap predator alami, serta pelepasan predator sebagai strategi pengendalian biologis.

Berdasarkan formulasi tersebut, sistem predator–prey yang melibatkan kedua kontrol dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx\left(1-\frac{x}{K}\right)-\frac{axy}{1+hx}-u_1(t)x,\\ \frac{dy}{dt} &= -dy+\frac{baxy}{1+hx}-\eta u_1(t)y+u_2(t).\end{aligned} \tag{2}$$

dengan kondisi awal $x(0)=x_0\geq 0, y(0)=y_0\geq 0$.

Analisis Sifat Solusi dan Eksistensi Kontrol Optimal

Analisis sifat solusi dilakukan untuk menjamin kepositifan dan keterbatasan kepadatan populasi hama serta predator alami pada persamaan (2). Selain itu, eksistensi pasangan kontrol optimal dikaji untuk memastikan bahwa masalah optimasi pada persamaan (3) memiliki setidaknya satu solusi optimal. Berikut disajikan Teorema 1 mengenai kepositifan dan keterbatasan solusi sistem, serta Teorema 2 mengenai eksistensi pasangan kontrol optimal beserta pembuktiannya.

Teorema 1. Diberikan sistem predator–prey pada Persamaan (2) dengan parameter model bernilai positif dan kondisi awal $x(0) = x_0 > 0$ serta $y(0) = y_0 > 0$. Jika kontrol memenuhi $0 \leq u_1(t) \leq u_{1\max}$ dan $0 \leq u_2(t) \leq u_{1\max}$, maka solusi $x(t)$ dan $y(t)$ tetap positif dan terbatas untuk setiap $t \in [0,T]$.

Bukti. Pertama, akan ditunjukkan bahwa solusi sistem tetap positif. Berdasarkan persamaan dinamika populasi hama dan predator alami, pada batas $x = 0$ diperoleh $\frac{dx}{dt} = 0$, sedangkan pada batas $y = 0$ diperoleh $\frac{dy}{dt} = u_2(t) \geq 0$. Kondisi tersebut menunjukkan bahwa medan vektor pada batas daerah nonnegatif tidak mengarah keluar dari daerah tersebut. Selanjutnya, persamaan populasi hama dapat dituliskan dalam bentuk

$$\frac{dx}{dt} = x[r\left(1-\frac{x}{K}\right)-ay/(1+hx)-u_1(t)].$$

Karena $x_0 > 0$, solusi persamaan tersebut tetap positif sepanjang interval keberadaannya. Demikian pula,

Original Article

karena $u_2(t) \geq 0$ dan suku pertumbuhan predator akibat pemangsaan bernilai nonnegatif, diperoleh

$$\frac{dy}{dt} \geq -(d + \eta u_{1max})y.$$

Berdasarkan prinsip perbandingan,

$$y(t) \geq y_0 e^{-(d+\eta u_{1max})t} > 0.$$

Dengan demikian, kedua populasi tetap positif sepanjang interval pengamatan. Selanjutnya, akan dibuktikan keterbatasan solusi sistem. Berdasarkan persamaan populasi hama, diperoleh

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{axy}{1 + hx} - u_1(t)x.$$

Karena suku pemangsaan dan pengendalian hama bernilai nonnegatif, maka

$$\frac{dx}{dt} \leq rx\left(1 - \frac{x}{K}\right).$$

Berdasarkan prinsip perbandingan pada persamaan pertumbuhan logistik, diperoleh

$$0 < x(t) \leq M,$$

dengan

$$M = max\{x_0, K\}.$$

Hal tersebut menunjukkan bahwa kepadatan populasi hama memiliki batas atas yang berhingga.

Untuk membuktikan keterbatasan populasi predator alami, didefinisikan fungsi pembantu

$$W(t) = bx(t) + y(t).$$

Dengan menurunkan $W(t)$ terhadap waktu dan mensubstitusikan Persamaan (2), diperoleh

$$\frac{dW}{dt} = brx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - bu_1(t)x - dy - \eta u_1(t)y + u_2(t).$$

Karena kedua kontrol bernilai nonnegatif serta berlaku $x\left(1 - \frac{x}{K}\right) \leq \frac{K}{4}$, maka

$$\frac{dW}{dt} \leq \frac{brK}{4} - dy + u_{2max}.$$

Berdasarkan definisi $W(t)$, diperoleh

$$y(t) = W(t) - bx(t).$$

Dengan demikian,

$$\frac{dW}{dt} \leq \frac{brK}{4} - dW + dbx + u_{2max}.$$

Karena $x(t) \leq M$, maka

$$\frac{dW}{dt} \leq C - dW,$$

dengan

$$C = \frac{brK}{4} + dbM + u_{2max}.$$

Berdasarkan prinsip perbandingan untuk persamaan diferensial linear, diperoleh

$$W(t) \leq W(0)e^{dt} + \frac{C}{d}(1 - e^{dt}).$$

Akibatnya,

$$W(t) \leq max\left\{W(0), \frac{C}{d}\right\}.$$

Karena $0 < y(t) \leq W(t)$, maka kepadatan predator alami juga memiliki batas atas yang berhingga. Oleh karena itu, kedua solusi $x(t)$ dan $y(t)$ tetap positif dan terbatas sepanjang interval $[0, T]$. □

Teorema 2. Diberikan sistem predator–prey pada Persamaan (2) dengan kondisi awal nonnegatif dan fungsi objektif pada Persamaan (3). Jika parameter $A > 0, B_1 > 0, B_2 > 0$, dan $S_x > 0$ serta kontrol berada dalam himpunan admissible, maka terdapat setidaknya satu pasangan kontrol optimal (u_1^*, u_2^*) yang meminimumkan fungsi objektif pada interval $[0, T]$.

Bukti. Himpunan kontrol admissible didefinisikan sebagai

$$\mathcal{U} = \{(u_1, u_2): 0 \leq u_1(t) \leq u_{1max}, 0 \leq u_2(t) \leq u_{2max}, t \in [0, T]\},$$

dengan kedua kontrol merupakan fungsi terukur dan batasan berlaku hampir di setiap waktu. Himpunan tersebut tidak kosong, tertutup, terbatas, dan konveks.

Berdasarkan Teorema 1, solusi sistem state tetap nonnegatif dan terbatas pada interval pengamatan. Selain itu, ruas kanan sistem state kontinu terhadap variabel keadaan, memenuhi kondisi Lipschitz lokal pada daerah yang relevan, serta bersifat affine terhadap kedua variabel kontrol. Sifat tersebut menjamin keberadaan dan keunikan lintasan state untuk setiap pasangan kontrol admissible yang diberikan.

Selanjutnya, integran fungsi objektif dinyatakan sebagai

$$L(x, u_1, u_2) = Ax + \left(\frac{B_1}{2}\right)u_1^2 + \left(\frac{B_2}{2}\right)u_2{}^2.$$

Karena $B_1 > 0$ dan $B_2 > 0$, fungsi L bersifat konveks secara ketat terhadap pasangan kontrol. Hal ini dapat dilihat dari matriks Hessian terhadap variabel kontrol yang berbentuk diagonal dengan elemen B_1 dan B_2, sehingga bersifat definit positif. Selain itu, fungsi biaya terminal $\Phi(x(T)) = \left(\frac{S_x}{2}\right)x^2(T)$ bersifat kontinu dan nonnegatif.

Copyright © 2026 – Indonesian Journal of Applied Mathematics

Published by: Lembaga Penelitian, Pengabdian Masyarakat, dan Penjaminan Mutu Institut Teknologi Sumatera, Lampung Selatan, Indonesia

Original Article

Karena himpunan kontrol admissible terbatas dan konveks, suatu barisan kontrol peminimum memiliki subbarisan yang konvergen lemah dalam ruang L^2. Keterbatasan solusi state dan sifat affine sistem terhadap kontrol memastikan bahwa lintasan limit tetap memenuhi persamaan state. Selanjutnya, semikontinuitas bawah suku biaya kuadratik serta kontinuitas biaya state dan penalti terminal menjamin bahwa pasangan kontrol limit mencapai nilai minimum fungsi objektif. Dengan demikian, terdapat setidaknya satu pasangan kontrol optimal pada interval $[0, T]$. □

Eksistensi pasangan kontrol optimal tidak secara langsung menjamin keunikan globalnya karena sistem state bersifat nonlinear, sehingga keunikan solusi untuk periode pengamatan $T = 50$ tidak diklaim tanpa pembuktian tambahan.

Tujuan dari masalah kontrol optimal ini adalah menentukan pasangan kontrol optimal $u_1^*(t)$ dan $u_2^*(t)$ yang dapat menekan populasi hama serta meminimumkan biaya pelaksanaan kontrol. Selain itu, diberikan penalti terminal terhadap populasi hama pada waktu akhir T, untuk memberikan penalti tambahan terhadap kepadatan hama pada akhir periode simulasi. Oleh karena itu, fungsi objektif didefinisikan sebagai

$$J(u_1, u_2) = \int_0^T \left[Ax(t) + \frac{B_1}{2} u_1^2(t) + \frac{B_2}{2} u_2^2(t) \right] dt + \frac{S_x}{2} x^2(T). \quad (3)$$

Parameter $A > 0$ menyatakan bobot penalti terhadap kepadatan hama selama interval pengamatan, sedangkan $B_1 > 0$ dan $B_2 > 0$ masing-masing menyatakan bobot biaya pengendalian hama dan pelepasan predator alami. Suku $Ax(t)$ menunjukkan bahwa semakin tinggi kepadatan hama, semakin besar penalti yang diberikan dalam fungsi objektif. Sementara itu, suku $\frac{B_1}{2} {u_1}^2(t)$ dan $\frac{B_2}{2} u_2^2(t)$ merepresentasikan penalti biaya pelaksanaan kedua kontrol. Bentuk kuadratik digunakan untuk memberikan penalti yang semakin besar terhadap peningkatan intensitas kontrol, sehingga strategi pengendalian yang dihasilkan tidak hanya berfokus pada penurunan kepadatan hama, tetapi juga mempertimbangkan efisiensi penggunaan kontrol. Selanjutnya, suku $\frac{S_x}{2} x^2(T)$ merupakan penalti terminal yang diberikan terhadap kepadatan hama pada waktu akhir T. Penambahan suku tersebut bertujuan untuk meningkatkan prioritas penekanan kepadatan hama pada akhir periode simulasi. Dengan demikian, fungsi objektif dirancang untuk memperoleh keseimbangan antara penurunan kepadatan hama, biaya pelaksanaan kontrol, dan kepadatan hama pada akhir pengamatan.

Masalah kontrol optimal dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\min_{(u_1, u_2) \in \mathcal{U}} J(u_1, u_2),$$

Untuk memperoleh karakterisasi kontrol optimal, digunakan Prinsip Maksimum Pontryagin. Hamiltonian dari masalah kontrol optimal tersebut adalah

$$H = Ax + \frac{B_1}{2} u_1^2 + \frac{B_2}{2} u_2^2 + \lambda_1 \left[rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{axy}{1+hx} - u_1 x \right] + \lambda_2 \left[-dy + \frac{baxy}{1+hx} - \eta u_1 y + u_2 \right] \quad (4)$$

dengan $\lambda_1(t)$ dan $\lambda_2(t)$ masing-masing merupakan variabel adjoint yang bersesuaian dengan $x(t)$ dan $y(t)$.

Teorema 3. Misalkan $(x^*(t), y^*(t))$ merupakan solusi *state* optimal dari model (2) dengan fungsi objektif (3). Jika $(u_1^*(t), u_2^*(t))$ merupakan pasangan kontrol optimal, maka terdapat fungsi adjoint $\lambda_1(t)$ dan $\lambda_2(t)$ sehingga berlaku sistem *costate*

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -A - \lambda_1 \left[r - \frac{2rx}{K} - \frac{ay}{(1+hx)^2} - u_1 \right] - \lambda_2 \left[\frac{bay}{(1+hx)^2} \right],$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = \lambda_1 \frac{ax}{1+hx} - \lambda_2 \left[-d + \frac{bax}{1+hx} - \eta u_1 \right].$$

Karena fungsi objektif memuat penalti terminal $\frac{S_x}{2} x^2(T)$, maka syarat transversal diberikan oleh

$$\lambda_1(T) = S_x x(T), \qquad \lambda_2(T) = 0.$$

Selain itu, kontrol optimal diberikan oleh

$$u_1^*(t) = \min \left\{ u_{1\max}, \max \left(0, \frac{\lambda_1(t) x(t) + \eta \lambda_2(t) y(t)}{B_1} \right) \right\},$$

dan

$$u_2^*(t) = \min\left\{u_{2\max}, \max\left(0, -\frac{\lambda_2(t)}{B_2}\right)\right\}.$$

Bukti. Berdasarkan Prinsip Maksimum Pontryagin, didefinisikan fungsi Hamiltonian seperti pada persamaan (4). Persamaan *costate* diperoleh dari

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{d\lambda_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y}.$$

Untuk menentukan λ_1, terlebih dahulu dihitung turunan parsial Hamiltonian terhadap x. Diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[rx\left(1-\frac{x}{K}\right)\right] = r - \frac{2rx}{K},$$

dan

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{axy}{1+hx}\right) = \frac{ay}{(1+hx)^2}.$$

Dengan demikian,

$$\frac{\partial H}{\partial x} = A + \lambda_1\left[r - \frac{2rx}{K} - \frac{ay}{(1+hx)^2} - u_1\right] + \lambda_2\left[\frac{bay}{(1+hx)^2}\right].$$

Karena

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

maka diperoleh

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -A - \lambda_1\left[r - \frac{2rx}{K} - \frac{ay}{(1+hx)^2} - u_1\right] - \lambda_2\left[\frac{bay}{(1+hx)^2}\right].$$

Selanjutnya, untuk menentukan λ_2, dihitung turunan parsial Hamiltonian terhadap y. Diperoleh $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{axy}{1+hx}\right) = \frac{ax}{1+hx}$, maka

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \lambda_1\left[-\frac{ax}{1+hx}\right] + \lambda_2\left[-d + \frac{bax}{1+hx} - \eta u_1\right].$$

Karena $\frac{d\lambda_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y}$, maka

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = -\lambda_1\left[-\frac{ax}{1+hx}\right] - \lambda_2\left[-d + \frac{bax}{1+hx} - \eta u_1\right].$$

Diperoleh

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = \lambda_1\frac{ax}{1+hx} - \lambda_2\left[-d + \frac{bax}{1+hx} - \eta u_1\right].$$

Karena fungsi objektif memuat biaya terminal $\Phi\big(x(T), y(T)\big) = \frac{S_x}{2}x^2(T)$, maka syarat transversal diperoleh dari

$$\lambda_1(T) = \frac{\partial \Phi}{\partial x(T)}, \lambda_2(T) = \frac{\partial \Phi}{\partial y(T)}.$$

Karena $\frac{\partial \Phi}{\partial x(T)} = S_x x(T)$, dan $\frac{\partial \Phi}{\partial y(T)} = 0$, maka syarat transversal menjadi

$$\lambda_1(T) = S_x x(T), \lambda_2(T) = 0.$$

Selanjutnya, kontrol optimal diperoleh dari kondisi stasioner Hamiltonian terhadap kontrol, yaitu $\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0$, dan $\frac{\partial H}{\partial u_2} = 0$. Untuk kontrol u_1, diperoleh

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = B_1 u_1 - \lambda_1 x - \eta\lambda_2 y.$$

Dengan mensyaratkan $\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0$, diperoleh

$$B_1 u_1 - \lambda_1 x - \eta\lambda_2 y = 0.$$

Akibatnya,

$$u_1 = \frac{\lambda_1 x + \eta\lambda_2 y}{B_1}.$$

Karena kontrol $u_1(t)$ dibatasi oleh

$$0 \le u_1(t) \le u_{1\max},$$

maka kontrol optimalnya diperoleh melalui proyeksi ke interval $[0, u_{1\max}]$, yaitu

$$u_1^*(t) = \min\left\{u_{1\max}, \max\left(0, \frac{\lambda_1(t)x(t) + \eta\lambda_2(t)y(t)}{B_1}\right)\right\}.$$

Untuk kontrol u_2, diperoleh

$$\frac{\partial H}{\partial u_2} = B_2 u_2 + \lambda_2.$$

Dengan mensyaratkan $\frac{\partial H}{\partial u_2} = 0$, diperoleh $B_2 u_2 + \lambda_2 = 0$, maka $u_2 = -\frac{\lambda_2}{B_2}$.

Karena kontrol $u_2(t)$ dibatasi oleh

$$0 \le u_2(t) \le u_{2\max},$$

maka kontrol optimalnya diperoleh melalui proyeksi ke interval $[0, u_{2\max}]$, yaitu

$$u_2^*(t) = \min\left\{u_{2\max}, \max\left(0, -\frac{\lambda_2(t)}{B_2}\right)\right\}.$$

Dengan demikian, diperoleh sistem *costate*, syarat transversal, dan karakterisasi kontrol optimal sebagaimana dinyatakan pada Teorema 3.

Solusi Numerik

Pada subbab ini dilakukan simulasi numerik untuk menganalisis pengaruh pemberian kontrol optimal terhadap dinamika kepadatan populasi hama dan predator alami. Simulasi menggunakan parameter dasar model sebagaimana disajikan pada Tabel 1, dengan kondisi awal $x(0) = 0{,}6$ dan $y(0) = 0{,}8$ serta

Copyright © 2026 – Indonesian Journal of Applied Mathematics

Published by: Lembaga Penelitian, Pengabdian Masyarakat, dan Penjaminan Mutu Institut Teknologi Sumatera, Lampung Selatan, Indonesia

Original Article

waktu akhir $T = 50$ satuan waktu model. Simulasi dilakukan dengan membandingkan dua skenario, yaitu model tanpa kontrol dan model dengan dua kontrol optimal. Perbandingan tersebut bertujuan untuk mengevaluasi efektivitas pengendalian hama dan pelepasan predator alami dalam menekan kepadatan hama serta mempertahankan keberadaan predator alami dalam sistem.

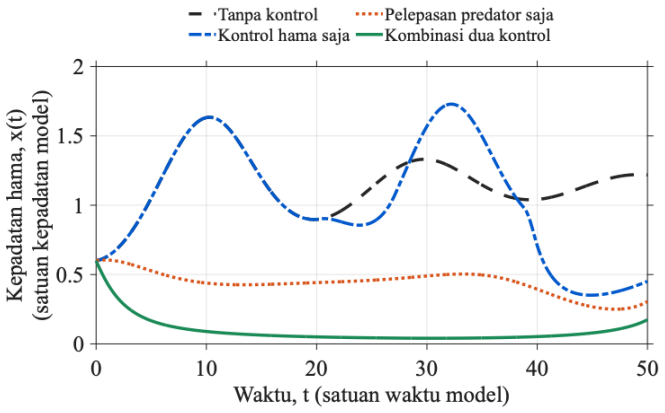
Tabel 2. Nilai parameter kontrol optimal

Parameter	Keterangan	Nilai
A	Bobot kepadatan hama	1
B_1	Bobot biaya pengendalian hama	5
B_2	Bobot biaya pelepasan predator alami	20
S_x	Bobot penalty terminal kepadatan hama	30
u_{1max}	Batas maksimum pengendalian hama	0,35
u_{2max}	Batas maksimum pelepasan predator alami	0,50

Nilai parameter pada Tabel 2 ditetapkan berdasarkan asumsi skenario simulasi. Parameter $A = 1$ menyatakan bobot kepadatan hama, sedangkan $B_1 = 5$ dan $B_2 = 20$ masing-masing merupakan bobot biaya pengendalian hama dan pelepasan predator alami. Pemilihan B_2 yang lebih besar dibandingkan B_1 didasarkan pada asumsi bahwa pelepasan predator alami memiliki penalti biaya relatif lebih tinggi daripada pengendalian hama secara langsung. Sementara itu, $S_x = 30$ merupakan bobot penalti terminal yang digunakan untuk meningkatkan prioritas penekanan kepadatan hama pada akhir periode simulasi. Batas maksimum kontrol pengendalian hama dan pelepasan predator alami masing-masing ditetapkan sebesar $u_{1\max} = 0{,}35$ dan $u_{2max} = 0{,}50$. Seluruh nilai parameter tambahan tersebut ditentukan sebagai asumsi skenario simulasi dan belum dikalibrasi menggunakan data biaya lapangan.

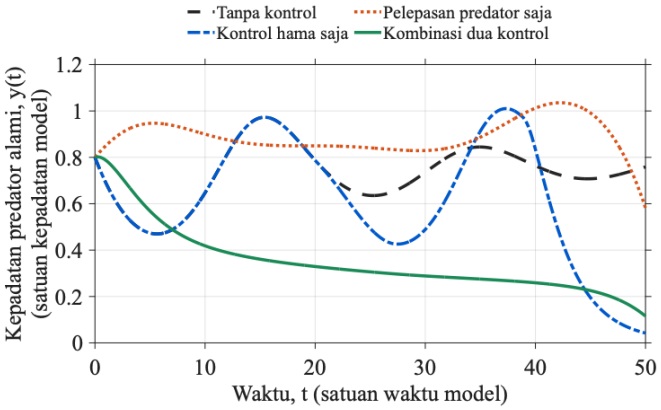
Penyelesaian numerik dilakukan menggunakan metode *forward-backward sweep* dengan skema Runge–Kutta orde empat. Pada metode ini, sistem *state* diselesaikan secara maju dari waktu awal $t = 0$ hingga waktu akhir $T = 50$ berdasarkan kondisi awal yang diberikan. Selanjutnya, sistem *adjoint* diselesaikan secara mundur menggunakan syarat transversal, kemudian kedua kontrol diperbarui berdasarkan karakterisasi kontrol optimal yang diperoleh melalui Prinsip Maksimum Pontryagin. Proses tersebut dilakukan secara iteratif hingga memenuhi kriteria konvergensi. Interval simulasi dibagi menjadi 2.000 partisi dengan ukuran langkah 0,025, menggunakan faktor relaksasi sebesar 0,10, toleransi perubahan kontrol sebesar 10^{-8} dan toleransi residual karakterisasi kontrol sebesar 10^{-6}.

Hasil simulasi numerik pada empat skenario pengendalian disajikan pada Gambar 1–4. Keempat skenario tersebut meliputi kondisi tanpa kontrol, pengendalian hama saja, pelepasan predator alami saja, serta kombinasi kedua kontrol. Perbandingan dilakukan untuk mengevaluasi efektivitas masing-masing strategi dalam menekan kepadatan hama dan mempertahankan keberadaan predator alami selama periode pengamatan.



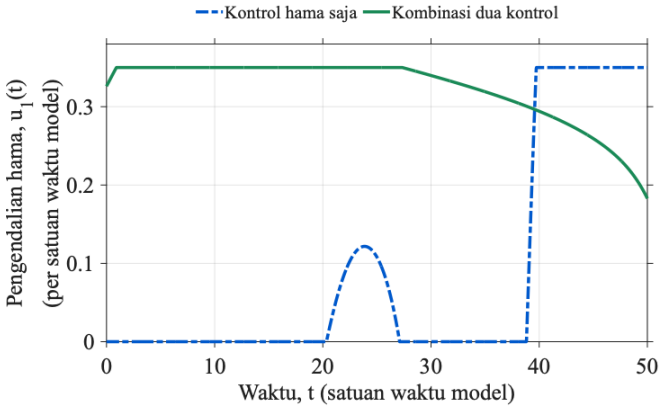
Gambar 1. Perbandingan kepadatan hama pada empat skenario pengendalian.

Gambar 1 memperlihatkan perbandingan dinamika kepadatan hama pada keempat skenario. Pada kondisi tanpa kontrol, kepadatan hama mengalami fluktuasi dan mencapai 1,2183 pada akhir simulasi. Penerapan pengendalian hama saja menghasilkan kepadatan akhir sebesar 0,4512, meskipun masih menunjukkan osilasi yang cukup besar sepanjang periode pengamatan. Sementara itu, pelepasan predator alami saja menghasilkan kepadatan hama akhir sebesar 0,3063. Kombinasi kedua kontrol memberikan penurunan paling besar dengan kepadatan hama akhir sebesar 0,1745. Hasil ini menunjukkan bahwa penerapan kedua kontrol secara bersamaan lebih efektif dalam menekan kepadatan hama dibandingkan masing-masing kontrol tunggal berdasarkan hasil numerik yang diperoleh.

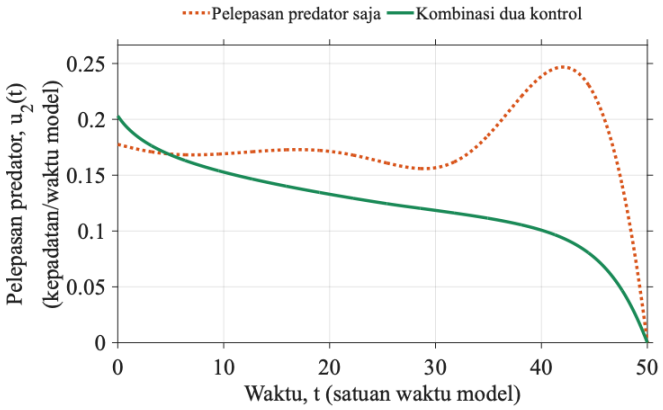


Gambar 2: Perbandingan kepadatan predator alami pada empat skenario pengendalian.

Gambar 2 menunjukkan dinamika kepadatan predator alami pada keempat skenario. Pada kondisi tanpa kontrol, kepadatan predator alami mengalami fluktuasi dan mencapai 0,7587 pada akhir simulasi. Pengendalian hama saja menyebabkan kepadatan predator menurun menjadi 0,0422, yang berkaitan dengan dampak negatif pestisida terhadap predator alami dalam model. Sebaliknya, pelepasan predator saja menghasilkan kepadatan akhir sebesar 0,5817, sedangkan kombinasi kedua kontrol menghasilkan 0,1153. Meskipun kepadatan predator pada skenario kombinasi lebih rendah dibandingkan pelepasan predator saja, nilainya tetap positif sepanjang periode pengamatan. Hal ini menunjukkan bahwa strategi kombinasi mampu menekan kepadatan hama secara signifikan, tetapi juga disertai penurunan kepadatan predator alami.



Gambar 3. Perbandingan kontrol optimal pengendalian hama pada skenario kontrol tunggal dan kombinasi.



Gambar 4. Perbandingan kontrol optimal pelepasan predator alami pada skenario kontrol tunggal dan kombinasi.

Gambar 3 memperlihatkan perbedaan pola kontrol optimal pengendalian hama pada skenario kontrol tunggal dan kombinasi kedua kontrol. Pada skenario pengendalian hama saja, intensitas kontrol bernilai nol pada sebagian periode pengamatan,

Copyright © 2026 – Indonesian Journal of Applied Mathematics

Published by: Lembaga Penelitian, Pengabdian Masyarakat, dan Penjaminan Mutu
Institut Teknologi Sumatera, Lampung Selatan, Indonesia

Original Article

kemudian meningkat pada interval tertentu dan mencapai batas maksimum sebesar 0,35 menjelang akhir simulasi. Pola tersebut berkaitan dengan dinamika interaksi hama dan predator serta keberadaan penalti terminal dalam fungsi objektif. Sebaliknya, pada skenario kombinasi, intensitas pengendalian hama relatif tinggi sejak awal, mencapai batas maksimum 0,35, kemudian menurun secara bertahap hingga sekitar 0,183 pada akhir periode. Perbedaan ini menunjukkan bahwa penambahan strategi pelepasan predator alami memengaruhi pola pengendalian hama yang diperoleh melalui optimasi.

Gambar 4 menunjukkan pola kontrol optimal pelepasan predator alami. Pada skenario pelepasan predator saja, intensitas kontrol pada awal periode sekitar 0,18, mengalami fluktuasi, dan meningkat hingga sekitar 0,25 menjelang $t = 42$ sebelum menurun menuju nol pada akhir simulasi. Sementara itu, pada skenario kombinasi, intensitas pelepasan predator dimulai sekitar 0,20 dan cenderung menurun secara bertahap hingga mencapai nol pada waktu akhir. Perbedaan tersebut menunjukkan bahwa penerapan pengendalian hama secara bersamaan mengurangi kebutuhan pelepasan predator alami dalam solusi kontrol yang diperoleh. Nilai kedua kontrol pelepasan predator yang mencapai nol pada waktu terminal juga sesuai dengan karakterisasi kontrol optimal dan syarat transversal yang digunakan.

Hasil perbandingan kuantitatif keempat skenario disajikan pada Tabel 3.

Tabel 3. Perbandingan hasil simulasi pada empat skenario pengendalian

Skenario	$x(50)$	$y(50)$	Nilai J	Penurunan hama (%)
Tanpa kontrol	1,2183	0,7587	79,7534	–
Pengendalian hama saja	0,4512	0,0422	57,9466	62,96
Pelepasan predator saja	0,3063	0,5817	39,5297	74,86
Kombinasi kedua kontrol	0,1745	0,1153	26,6926	85,67

Berdasarkan Tabel 3, pengendalian hama saja menghasilkan penurunan kepadatan hama akhir sebesar 62,96%, sedangkan pelepasan predator saja menghasilkan penurunan sebesar 74,86%. Kombinasi kedua kontrol memberikan penurunan terbesar, yaitu 85,67%, dengan nilai fungsi objektif paling rendah sebesar 26,6926 dibandingkan 79,7534 pada kondisi tanpa kontrol. Penurunan nilai fungsi objektif sebesar 66,53% menunjukkan bahwa kombinasi kedua kontrol menghasilkan kinerja terbaik berdasarkan fungsi tujuan dan parameter yang digunakan dalam penelitian ini.

Analisis Biaya-Efektivitas

Untuk mengevaluasi efisiensi penggunaan kontrol, dilakukan analisis *cost-effectiveness* berdasarkan penalti biaya kontrol dan akumulasi kepadatan hama yang berhasil dihindari selama periode simulasi. Penalti biaya kontrol, C, dihitung berdasarkan jumlah integral biaya kuadratik pengendalian hama dan pelepasan predator alami. Sementara itu, efektivitas pengendalian, E, dinyatakan sebagai selisih akumulasi kepadatan hama antara kondisi tanpa kontrol dan setiap skenario pengendalian. Rasio biaya-efektivitas (*Cost-Effectiveness Ratio* atau CER) dihitung sebagai perbandingan C terhadap E, dengan E > 0. Nilai CER yang lebih kecil menunjukkan penalti biaya kontrol yang lebih rendah untuk setiap satuan akumulasi kepadatan hama yang berhasil dihindari.

Tabel 4. Perbandingan biaya-efektivitas strategi pengendalian

Skenario	Penalti biaya (C)	Efektivitas (E)	CER
Pengendalian hama saja	3,3768	5,9747	0,5652
Pelepasan predator saja	16,2035	35,5719	0,4555
Kombinasi kedua kontrol	21,6136	52,8684	0,4088

Berdasarkan Tabel 4, strategi kombinasi menghasilkan efektivitas terbesar sebesar 52,8684 dengan penalti biaya kontrol sebesar 21,6136. Meskipun total penalti biaya lebih tinggi dibandingkan strategi

tunggal, kombinasi kedua kontrol memiliki nilai CER paling rendah, yaitu 0,4088. Nilai tersebut lebih kecil dibandingkan pengendalian hama saja sebesar 0,5652 dan pelepasan predator saja sebesar 0,4555. Hal ini menunjukkan bahwa strategi kombinasi memberikan rasio penalti biaya terhadap efektivitas yang lebih baik berdasarkan ukuran yang digunakan.

Analisis biaya-efektivitas inkremental (*Incremental Cost-Effectiveness Ratio* atau ICER) selanjutnya dilakukan untuk mengetahui tambahan penalti biaya yang diperlukan guna memperoleh peningkatan efektivitas melalui strategi kombinasi. Dibandingkan pengendalian hama saja, kombinasi kedua kontrol menghasilkan tambahan penalti biaya sebesar 18,2367 dan tambahan efektivitas sebesar 46,8937, sehingga diperoleh ICER sebesar 0,3889. Sementara itu, dibandingkan pelepasan predator saja, strategi kombinasi menghasilkan tambahan penalti biaya sebesar 5,4100 dan tambahan efektivitas sebesar 17,2965, sehingga diperoleh ICER sebesar 0,3128. Hasil tersebut menunjukkan bahwa penggunaan kedua kontrol secara bersamaan memberikan tambahan efektivitas dengan konsekuensi peningkatan penalti biaya kontrol.

Secara keseluruhan, hasil simulasi menunjukkan bahwa kombinasi pengendalian hama dan pelepasan predator alami menghasilkan kepadatan hama akhir serta nilai fungsi objektif terendah di antara empat skenario yang diuji. Analisis biaya-efektivitas juga menunjukkan bahwa kombinasi kedua kontrol memiliki rasio CER terendah. Namun, biaya yang digunakan merupakan penalti biaya berdasarkan bobot fungsi objektif, bukan biaya ekonomi aktual. Oleh karena itu, hasil analisis ini menggambarkan efisiensi relatif strategi pengendalian berdasarkan asumsi parameter model dan belum dapat ditafsirkan sebagai efisiensi biaya pengendalian dalam satuan moneter.

Kesimpulan

Penelitian ini berhasil memformulasikan model kontrol optimal pada dinamika interaksi hama dan predator alami melalui dua strategi pengendalian, yaitu pengendalian hama dan pelepasan predator alami. Prinsip Maksimum Pontryagin digunakan untuk memperoleh sistem optimalitas yang meliputi sistem *state*, sistem *adjoint*, syarat transversal, dan karakterisasi kontrol optimal. Penyelesaian numerik dilakukan menggunakan metode *forward-backward sweep* untuk mengevaluasi efektivitas strategi pengendalian.

Hasil simulasi menunjukkan bahwa pengendalian hama saja dan pelepasan predator alami saja masing-masing mampu menurunkan kepadatan hama akhir sebesar 62,96% dan 74,86%, sedangkan kombinasi kedua kontrol menghasilkan penurunan terbesar, yaitu 85,67%. Pada akhir simulasi, kepadatan hama menurun dari 1,2183 pada kondisi tanpa kontrol menjadi 0,1745 pada kondisi kombinasi, sementara kepadatan predator alami tetap positif sebesar 0,1153. Selain itu, nilai fungsi objektif menurun dari 79,7534 menjadi 26,6926 atau mengalami penurunan sebesar 66,53%.

Analisis biaya-efektivitas menunjukkan bahwa kombinasi kedua kontrol menghasilkan nilai CER terendah sebesar 0,4088 dibandingkan kedua strategi tunggal. Dengan demikian, kombinasi pengendalian hama dan pelepasan predator alami memberikan hasil terbaik dalam menekan kepadatan hama dan meminimumkan nilai fungsi objektif berdasarkan parameter simulasi yang digunakan, meskipun memerlukan penalti biaya kontrol yang lebih besar dibandingkan strategi tunggal.

Referensi

[1] J. Xie *et al.*, "Intelligent Detection and Control of Crop Pests and Diseases: Current Status and Future Prospects," Jun. 01, 2025, *Multidisciplinary Digital Publishing Institute (MDPI)*. doi: 10.3390/agronomy15061416.

[2] D. M. Rizzo, M. Lichtveld, J. A. K. Mazet, E. Togami, and S. A. Miller, "Plant health and its effects on food safety and security in a One Health framework: four case studies," *One Health Outlook*, vol. 3, no. 1, Dec. 2021, doi: 10.1186/s42522-021-00038-7.

[3] Y. Gai and H. Wang, "Plant Disease: A Growing Threat to Global Food Security," Aug. 01, 2024, *Multidisciplinary Digital Publishing Institute (MDPI)*. doi: 10.3390/agronomy14081615.

Copyright © 2026 – Indonesian Journal of Applied Mathematics

Published by: Lembaga Penelitian, Pengabdian Masyarakat, dan Penjaminan Mutu Institut Teknologi Sumatera, Lampung Selatan, Indonesia

Original Article

[4] F. X. D. Verdadero *et al.*, "Pesticides in the Environment: Benefits, Harms, and Detection Methods," Dec. 01, 2025, *Multidisciplinary Digital Publishing Institute (MDPI)*. doi: 10.3390/sci7040171.

[5] Z. Zhou, Q. Quan, J. Jiao, and X. Dai, "Bifurcation dynamics of a predator–prey model with impulsive density-dependent nonlinear pesticide spraying and predator release," *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, vol. 150, Nov. 2025, doi: 10.1016/j.cnsns.2025.108979.

[6] W. Zhou, Y. Arcot, R. F. Medina, J. Bernal, L. Cisneros-Zevallos, and M. E. S. Akbulut, "Integrated Pest Management: An Update on the Sustainability Approach to Crop Protection," Oct. 08, 2024, *American Chemical Society*. doi: 10.1021/acsomega.4c06628.

[7] M. Luthfi, A. Suryanto, I. Darti, and F. A. Abdullah, "Dynamics of pest control model using natural enemy and refugia plant," *Results in Control and Optimization*, vol. 20, Sep. 2025, doi: 10.1016/j.rico.2025.100607.

[8] A. Himmatul Ulum and M. Fajar Safaatullah, "Predator-Prey Model in the Growth Phase of Rice Plants with Pest Control Using Pesticides," *UNNES Journal of Mathematics*, vol. 13, no. 1, pp. 1–10, 2024, [Online]. Available: http://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/ujm

[9] D. B. Prakash and D. K. K. Vamsi, "Global dynamics and time-optimal control studies for additional food provided holling type-III mutually interfering prey-predator systems with applications to pest management," *Discover Applied Sciences*, vol. 7, no. 8, Aug. 2025, doi: 10.1007/s42452-025-07255-z.

[10] H. Pu, S. Meleshko, E. Schulz, and J. Jiao, "Study on pest management SI epidemic model with instantaneous and non-instantaneous impulsive effects," *AIMS Mathematics*, vol. 10, no. 10, pp. 24179–24207, 2025, doi: 10.3934/math.20251072.

[11] K. G. Kebedow, S. L. Cheru, and T. T. Ega, "Optimal Control Strategies in a Diseased Prey–Predator Model With Holling Type-II Dynamics," *J. Appl. Math.*, vol. 2025, no. 1, 2025, doi: 10.1155/jama/5535536.

[12] H. Qiu, T. Zhang, and R. Hou, "Optimal control of an infected prey–predator model with fear effect," *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, vol. 29, no. 4, pp. 670–692, Jul. 2024, doi: 10.15388/namc.2024.29.35236.

[13] S. Lenhart and J. T. Workman, *Optimal Control Applied to Biological Models*. Chapman & Hall/CRC, New York, 2007. doi: https://doi.org/10.1201/9781420011418.

[14] F. L. Lewis, D.L, and V. L. Syrmos, *Optimal Control*, 3rd ed. JohnWiley&Sons, 2012. doi: https://doi.org/10.1002/9781118122631.

[15] R. U. Diva Amalia, Fatmawati, Windarto, and D. K. Arif, "Optimal control of predator-prey mathematical model with infection and harvesting on prey," in *Journal of Physics: Conference Series*, Institute of Physics Publishing, Mar. 2018. doi: 10.1088/1742-6596/974/1/012050.

[16] P. Rebelo and S. Rosa, "An optimal control problem for a predator–prey model with strong and weak preys," *Chaos Solitons Fractals*, vol. 191, Feb. 2025, doi: 10.1016/j.chaos.2024.115838.

[17] D. Suhika, R. Saragih, and D. Handayani, "Application of optimal control on mathematical model for spreading of Covid-19," *AIP Publishing.*, vol. 3083, Jul. 2024, doi: 10.1063/5.0225256.

[18] C. E. Madubueze, S. Dachollom, and I. O. Onwubuya, "Controlling the Spread of COVID-19: Optimal Control Analysis," *Comput. Math. Methods Med.*, vol. 2020, 2020, doi: 10.1155/2020/6862516.

[19] O. J. Peter, C. E. Madubueze, M. M. Ojo, F. A. Oguntolu, and T. A. Ayoola, "Modeling and optimal control of monkeypox with cost-effective strategies," *Model. Earth Syst. Environ.*, vol. 9, no. 2, pp. 1989–2007, Jun. 2023, doi: 10.1007/s40808-022-01607-z.