Original Article

e-ISSN: 2774-2016 - https://journal.itera.ac.id/index.php/indojam/
p-ISSN: 2774-2067

Received 20th August 2022
Accepted 13th Januari 2023
Published 28th January 2023

Open Access

DOI:

10.35472/indojam.v2i2.1039

Bilangan Dominasi-Lokasi pada Graf Hasil Kali Operasi *Comb* Graf Lintasan dan Graf Siklus

Aswan Anggun Pribadi[a*], Muhammad Dhani[a], Anastasia Lia Dwi Prestanti[a]

[a] *Program Studi Matematika Institut Teknologi Sumatera, Lampung Selatan, 35365, Indonesia*

* *Koresponden E-mail:* aswan.pribadi@ma.itera.ac.id

Abstract: Dominating set of graph G is subset $D \subseteq V(G)$ which for every vertex $v \in V(G)\backslash D$ those vertices has neighbour in D. If for every pairs of vertice x and y their neighbour set different than we called D locating-dominating set. As for the minimum cardinality of possible dominating set of G is called the locating-dominating number of G. We determine the value of the locating-dominating number for comb product path (P_n) and cycle (C_n) graph.

Keywords: *comb product, cycle, locating-dominating number, path*

Abstrak: Suatu subhimpunan titik $D \subseteq V(G)$ merupakan himpunan dominasi jika setiap titik $v \in V(G)\backslash D$ memiliki tetangga di D. Jika setiap titik berbeda $x, y \in V(G)\backslash D$ memiliki himpunan tetangga di D yang berbeda dan tak kosong maka himpunan D tersebut disebut sebagai himpunan dominasi-lokasi. Kardinalitas minimum dari himpunan dominasi-lokasi pada graf G disebut sebagai bilangan dominasi-lokasi dari graf G. Pada penelitian ini ditentukan bilangan dominasi-lokasi dari graf hasil operasi comb graf lintasan (P_n) dan graf siklus (C_n).

Kata Kunci: *bilangan dominasi lokasi, graf lintasan, graf siklus, operasi comb*

Pendahuluan

Pada penelitian ini suatu graf G didefinisikan sebagai pasangan terurut dua himpunan (V, E). Himpunan V tidak boleh kosong dan anggotanya disebut titik, sedangkan anggota dari E merupakan pasangan tak terurut dua titik di G. Anggota himpinan E ini kita sebut sebagai sisi. Jika $x, y \in V$ dan $\{x, y\} \in E$ maka titik x dan y dikatakan bertetangga. Dalam penelitian ini sisi $\{x, y\}$ akan ditulisakan sebagai xy atau yx saja.

Graf Lintasan P_n merupakan graf dengan n titik dan $n-1$ sisi, sedangkan graf Siklus C_n merupakan graf dengan n titik dan n sisi yang didefiniskan sebagai berikut,

$$V(P_n) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$$
$$E(P_n) = \{v_i v_{i+1} |\ i = 1, 2, \dots, n-1\}$$

dan

$$V(C_n) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$$
$$E(C_n) = \{v_1 v_n, v_i v_{i+1} |\ i = 1, 2, \dots, n-1\}$$

Secara umum graf siklus C_n dapat diperoleh dengan menambahkan sisi $v_1 v_n$ pada graf lintasan P_n atau $E(C_n) = E(P_n) \cup \{v_1 v_n\}$. Sebaliknya jika salah satu sisi pada graf siklus C_n dihapus dari himpunan sisi nya maka akan diperoleh graf P_n.

Himpunan tetangga titik x dinotasikan sebagai $N(x)$ merupaka himpunan dengan anggota sebagai berikut $N(x) = \{y \in V | yx \in E\}$. Suatu sub-himpunan titik D pada G dikatakan himpunan dominasi jika untuk setiap titik $v \in V(G)\backslash D$ memenuhi $D \cap N(v) \neq \emptyset$. Ketika himpunan dominasi D memenuhi syarat tambahan, yaitu untuk setiap titik berbeda u dan v berlaku $\big(D \cap N(u)\big) \neq \big(D \cap N(v)\big)$, maka himpunan D disebut himpunan dominasi-lokasi graf G.

Kardinalitas minimum dari himpunan dominasi yang mungkin dari graf G disebut sebagai bilangan dominasi graf G dan dinotasikan dengan $\gamma(G)$. Sedangkan, kardinalitas minimum dari himpunan dominasi-lokasi yang mungkin disebut sebagai bilangan dominasi-lokasi graf G dan dinotasikan oleh $\lambda(G)$. Definisi awal terkait

Original Article

bilangan dominasi-lokasi ini pertama kali diberikan oleh Slater [1,2]. Kemudian [3] memberikan definisi untuk bilangan dominasi-lokasi-metrik pada graf.

Pada penelitianya [4], Seo dan Slater telah menunjukkan bahwa masalah penentuan bilangan dominasi-lokasi merupakan masalah-NP. Beberapa algoritma penentuan himpunan dominasi dan himpunan dominasi-lokasi telah banyak diberikan, salah satunya bisa dilihat pada [5]. Pada [6] telah ditentukan bilangan dominasi dan bilangan dominasi-lokasi untuk graf lintasan, graf siklus, graf lengkap graf bipartit dan graf roda. Sedangkan [7] memberikan hasil terkait bilangan dominasi lokasi pada komplemen suatu graf.

Tabel 1. Bilangan Dominasi dan Bilangan Dominasi-Lokasi Graf $P_{n,(n\geq 3)}$ dan $C_{n,(n\geq 5)}$ [1].

Graf	γ	λ
P_n, C_n	$\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$	$\left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil$

Hasil operasi comb graf G dan H dinotasikan dengan $G \rhd_x H$ ditentukan oleh tiga objek, yaitu, graf G, graf H dan suatu titik x pada graf H. Graf $G \rhd_x H$ diperoleh dengan menduplikasi graf H sebanyak titik graf G, kemudian titik x pada duplikasi ke i dari H ditempelkan ke titik ke-i graf G . Secara umum pemilihan titik x yang ditempelkan akan menghasilkan graf yang berbeda.

Berdasarkan [8] bilangan dominasi-lokasi dari graf $G \rhd_x H$ bergantung pada himpunan dominasi-lokasi graf yang diinduksi oleh $V(H)\backslash\{x\}$. Secara umum nilai $\lambda(G \rhd_x H)$ dapat dikategorikan dalam 3 tipe bergantung graf H dan titik x yang dipilih.

Graf H bertipe $\mathcal{A}_x$ jika terdapat D, himpunan dominasi-lokasi graf $H\backslash\{x\}$ dengan kardinalitas $\lambda(H)-1$, dan terdapat titik v pada graf $H\backslash\{x\}$ yang memenuhi $N_H(v)\cap D = N_H(x)\cap D \neq \emptyset$. Jika untuk setiap D tersebut memenuhi $N_H(x)\cap D=\emptyset$ maka graf H bertipe $\mathcal{B}_x$. Terakhir, jika $\lambda(H\backslash\{x\}) = \lambda(H)$ maka H dikategorikan bertipe $\mathcal{C}_x$. Berdasarkan ketiga tipe tersebut nilai $\lambda(G \rhd_x H)$ dikategorikan dalam teorema berikut.

Teorema 1. [8] Jika graf G dan H merupakan graf terhubung yang tak-trivial dan $x \in V(H)$ maka

$$\lambda(G \rhd_x H) = \begin{cases} \gamma(G) + |V(G)|(\lambda(H)-1), & \text{jika } H \text{ tipe } \mathcal{A}_x \\ \lambda(G) + |V(G)|(\lambda(H)-1), & \text{jika } H \text{ tipe } \mathcal{B}_x \\ |V(G)|\big(\lambda(H)\big), & \text{jika } H \text{ tipe } \mathcal{C}_x \end{cases}$$

Hasil dan Diskusi

Hasil yang diperoleh sebagai berikut

Lema 1. Misalkan $A_n \in \{P_n, C_n\}$ dengan $n = 3 \bmod 5$ dan $x = v_n$ maka A_n bertipe $\mathcal{A}_x$

Bukti. Misalkan $A_n \in \{P_n, C_n\}$ maka $A_n\backslash\{x\} = P_{n-1}$. Karena $n = 3 \bmod 5$ maka $n = 5a+3$ dengan a bilangan bulat tak negatif. Akibatnya,

$$\lambda(A_n) = \left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil = 2a+2$$
$$\lambda(P_{n-1}) = \left\lceil \frac{2(n-1)}{5} \right\rceil = 2a+1$$

Perhatikan D, himpunan dominasi-lokasi graf P_{n-1} yang titiknya sebagai berikut

$$D = \{v_{5i+2}, v_{5i+4}, v_{5a+2} | 0 \leq i \leq a-1, i \in \mathbb{Z}\}.$$

D merupakan himpunan dominasi-lokasi dengan $|D| = 2a+1 = \lambda(A_n) - 1$. Lebih jauh didapat himpunan tetangga v_n di D tak kosong karena v_{5a+2} dan $v_n = v_{5a+3}$ bertetangga. Kemudian karena

$$\begin{aligned} N_{A_n}(v_n) \cap D &= N_{A_n}(v_{5a+3}) \cap D \\ &= \{v_{5a+2}\} = N_{A_n}(v_{5a+1}) \cap D, \end{aligned}$$

maka A_n memenuhi sebagai tipe $\mathcal{A}_{v_n} = \mathcal{A}_x$.

Lema 2. Misalkan $A_n \in \{P_n, C_n\}$ dengan $n = 1 \bmod 5$ dan $x = v_n$ maka A_n bertipe $\mathcal{B}_x$

Bukti. Misalkan $A_n \in \{P_n, C_n\}$ maka $A_n\backslash\{x\} = P_{n-1}$. Karena $n = 1 \bmod 5$ maka $n = 5a+1$ dengan a bilangan bulat tak negatif. Akibatnya,

$$\lambda(A_n) = \left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil = 2a+1$$
$$\lambda(P_{n-1}) = \left\lceil \frac{2(n-1)}{5} \right\rceil = 2a$$

Menggunakan kontradiksi akan ditunjukkan setiap himpunan D, himpunan dominasi-lokasi P_{n-1} dengan kardinalitas $|D| = \lambda(A_n) = 2a$ berlaku $N_{A_n}(v_n) \cap D = \emptyset$.

Andaikan ada D suatu himpunan-dominasi lokasi dari graf P_{n-1} dengan $|D| = 2a$ dan memenuhi $N_{A_n}(v_n) \cap D = \emptyset$. Tanpa mengurangi

Published by: Lembaga Penelitian dan Pengabdian Masyarakat (LPPM)
Institut Teknologi Sumatera, Lampung Selatan, Indonesia

Original Article

keumuman bukti, misalkan $v_{n-1} \in N_{A_n}(v_n) \cap D$. Misalkan $D^- = D \cap \{v_1, v_2, \dots, v_{n-3}\}$ maka $|D^-| \leq 2a - 1$. Lebih jauh haruslah D^- himpunan dominasi-lokasi graf P_{n-3} (graf dengan titik $V(P_{n-1}) \backslash \{v_{n-2}, v_{n-1}\}$. Hal ini kontradiksi dengan

$$\lambda(P_{n-3}) = \left\lceil \frac{2(n-3)}{5} \right\rceil = 2a.$$

Artinya setiap himpunan D, himpunan dominasi-lokasi P_{n-1} dengan kardinalitas $|D| = \lambda(A_n)$ memenuhi $N_{A_n}(v_n) \cap D = \emptyset$. Akibatnya graf A_n termasuk tipe $\mathcal{B}_x$.

Lema 3. Misalkan $A_n \in \{P_n, C_n\}$ dengan $n = 0,2,4$ mod 5 dan $x = v_n$ maka A_n bertipe $\mathcal{C}_x$

Bukti. Misalkan $A_n \in \{P_n, C_n\}$ maka $A_n \backslash \{x\} = P_{n-1}$. Nilai $\lambda(A_n)$ dan $\lambda(P_{n-1})$ untuk $n = 0,2,4 \; mod \; 5$ diberikan pada Tabel 2.

Tabel 2. Bilangan Dominasi dan Bilangan Dominasi-Lokasi Graf A_n dan P_{n-1} untuk $n = 0,2,4 \; mod \; 5$

n	$\lambda(A_n)$	$\lambda(P_{n-1})$
$5a$	$2a$	$2a$
$5a+2$	$2a+1$	$2a+1$
$5a+4$	$2a+2$	$2a+2$

Akibatnya $\lambda(A_n \backslash \{x\}) = \lambda(A_n)$, jadi A_n termasuk tipe $\mathcal{C}_x$ untuk $n = 0,2,4 \; mod \; 5$.

Berdasarkan hasil yang diperoleh pada Lema 1,2 dan 3 maka dapat ditentukan nilai himpunan dominasi lokasi untuk graf hasil operasi *comb* graf lintasan dan graf siklus yang tertuang pada teorema berikut.

Teorema 2. Misalkan $A_n \in \{P_n, C_n\}$. Jika $m, n \geq 5$ dan $x = v_n$ titik di A_n maka

$$\lambda(A_m \rhd_x A_n) = \begin{cases} \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil + m \left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil - m, & n = 3 \text{ mod } 5 \\ \left\lceil \frac{2m}{5} \right\rceil + m \left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil - m, & n = 1 \text{ mod } 5 \\ m \left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil, & n \text{ lainnya} \end{cases}$$

Konflik Kepentingan

Tidak terdapat konflik kepentingan pada penelitian dan penulisan jurnal ini.

Referensi

[1] P. J. Slater, "Domination and location in acyclic graphs," Networks, vol. 17, no. 1, pp. 55–64, 1987, doi: https://doi.org/10.1002/net.3230170105.

[2] P. J. Slater, "Dominating and Reference Sets in a Graph," Journal of Mathematical and Physical Sciences, vol. 22, no. 4, 1988, pp. 445-455.

[3] M. Henning and O. Oellermann, "Metric-Locating-Dominating Sets in Graphs.," Ars Comb., vol. 73, Jan. 2004.

[4] S. J. Seo and P. J. Slater, "Open neighborhood locating-dominating sets," Australasian Journal of Combinatorics, vol. 46, pp. 109–119, Jan. 2010.

[5] M. R. Garey and D. S. Johnson, Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness. Freeman, 1979. [Online]. Available: https://books.google.co.id/books?id=fjxGAQAAIAAJ

[6] J. Cáceres, M. C. Hernando, M. Mora, I. Pelayo, and M. Puertas, "Locating-dominating codes: Bounds and extremal cardinalities," Appl Math Comput, vol. 220, pp. 38–45, Jan. 2013.

[7] M. del Carmen Hernando Martín, M. M. Giné, and I. M. P. Melero, "Locating domination in graphs and their complements," 2013

[8] A. Pribadi and S. Saputro, "On locating-dominating number of comb product graphs," Indonesian Journal of Combinatorics, vol. 4, p. 27, Jan. 2020, doi: 10.19184/ijc.2020.4.1.4.